

Journal de *Objetos y* *Objetivos* *Matemáticos*

www.joom.org.mx

Ciudad de México. México. No. 1 Julio-Diciembre 2019

OBJETOS MATEMÁTICOS:

- **Apuntes sobre dos teoremas de la Geometría Diferencial.**
Francisco Guillermo Herrera Armendia.

OBJETIVOS MATEMÁTICOS:

- **Diseño y construcción de un manipulador industrial de cinco grados de libertad: Modelado matemático y análisis del efector final.**
Marcos Fajardo Rendón
- **Una visión de la currícula en Matemáticas**
Isaac Villavicencio Gómez

Francisco Guillermo Herrera Armendia
Editor en Jefe.
herrera@joom.org.mx

Marcos Fajardo Rendón
Editor Ejecutivo.
fajardo@joom.org.mx
Isaac Villavicencio Gómez
Coordinador Editorial.
villavicencio@joom.org.mx

CONSEJO PERIODISTA

Efraín Valencia Calzadilla
Sealtiel Pichardo Jiménez
Gregorio Montes de Oca Godínez
Areli Guadalupe Mateos Sanchez

COMITÉ CIENTÍFICO

Vitaliano Acevedo Silva
Marleny Hernández Escobar
Enrique Salazar Peña
María de Jesús Sentiés Nacaspac
Raciel Trejo Reséndiz

PRODUCCIÓN

Francisco Guillermo Herrera Armendia, Marcos Fajardo Rendón e Isaac Villavicencio Gómez

Webmaster
Marcos Fajardo Rendón

Web Designer
Juan Carlos Olivo Moya

JOURNAL DE OBJETOS Y OBJETIVOS MATEMÁTICOS, No. 1, julio-diciembre 2019, es una Publicación semestral editada por Francisco Guillermo Herrera Armendia con domicilio en Av. Zarzaparrillas 201 casa 12-A, Col. los Héroes Coacalco, Coacalco de Berriozabal, Estado de México, C.P. 55712, www.joom.org.mx, revistajoom@gmail.com.
Editor responsable: Marcos Fajardo Rendón.
Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04-2019-103016243300-203 otorgado por la Dirección de Reservas de Derechos del Instituto Nacional del Derecho de Autor, ISSN 2683-264X.
Responsable de la última actualización de este Número, Isaac Villavicencio Gómez con domicilio Pedro Mz. 10 Bis Lt 12-A; La Purísima, Ecatepec, Estado de México, C.P. 5031, fecha de la última modificación 01 de junio de 2019.

Journal de *Objetos y* *Objetivos* *Matemáticos*

Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos

Número 1

Julio-Diciembre 2019

Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos es una revista semestral revisada por pares de Acceso Abierto que publica artículos de investigación originales, así como ensayos teóricos en todos los aspectos de los objetos de las matemáticas puras y aplicadas.

Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos es una literatura de Acceso Abierto bajo la BOAI (Budapest Open Access Initiative) y el modelo Open Access, lo que significa la disponibilidad de acceso libre mediante Internet al público, permitiendo a cualquier usuario su lectura, descarga, copia, distribución, impresión, almacenamiento, búsqueda, digitalización o vínculo a los textos completos de estos artículos para su rastreo e indexado; sin necesidad de compensación financiera, legal o algún otro tipo.

La presentación y disposición en conjunto de cada página de *Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos* núm. 1, julio-diciembre de 2019, son propiedad de sus respectivos autores. En cada artículo publicado los autores conservan los derechos de autoría de su trabajo, pero los lectores son libres de reutilizar el material siempre y cuando se den las citas correspondientes adecuadamente, no sea modificado ni usado con fines comerciales; ya que todos los artículos se publican bajo la licencia de atribución Creative Commons (CC BY-NC-ND).

Las opiniones expresadas por los autores en *Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos* no necesariamente reflejan la postura de los editores de la publicación.

Contenido

Carta del Editor	3
-------------------------	----------

OBJETOS MATEMÁTICOS

Apuntes sobre dos teoremas de la Geometría Diferencial.	4
Notes on two theorems of Differential Geometry.	
<i>Francisco Guillermo Herrera Armendia</i>	

OBJETIVOS MATEMÁTICOS

Diseño y construcción de un manipulador industrial de cinco grados de libertad: Modelado matemático y análisis del efector final.	10
Design and manufacture of an industrial manipulator with five degrees of freedom: Mathematical modeling and final effector analysis.	
<i>Marcos Fajardo Rendón</i>	

Una visión de la currícula en Matemáticas

A perspective of the curriculum in Mathematics
Isaac Villavicencio Gómez

22

CARTA DEL EDITOR

Con el propósito de contribuir a la divulgación del conocimiento matemático, el grupo de docentes – investigadores que integramos el Cuerpo Académico “Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en la Formación Inicial y la Educación Básica”, ofrecemos al público interesado en la matemática y su entorno, una publicación semestral titulada *Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos (JOOM)* que incluye reportes de investigación, comentarios sobre obras matemáticas, experiencias áulicas de enseñanza y aprendizaje y breves ensayos, que representan el producto del trabajo individual y colectivo de los miembros de este equipo de investigación. Las secciones que conforman la publicación permiten insertar de manera oportuna las contribuciones recibidas y son: *Objetos Matemáticos*, con la intención de tratar exclusivamente los axiomas, teoremas y su demostración, corolarios y lemas, todos relacionados con la matemática pura. En la sección *Objetivos Matemáticos* se incluyen producciones relacionadas con la aplicación de la matemática a otras ramas del conocimiento.

Durante el año 2019 se consolida esta empresa; misma que surge como una idea que fue tomando forma hasta consolidarse, año que se relaciona con los siguientes eventos: En 1811 S. D. Poisson publica en Paris su Tratado de Mecánica; en 1872 se publica una excelente obra didáctica inglesa sobre los Elementos de Euclides dedicada a estudiantes que hoy en día cursarían la secundaria y el bachillerato escrita por I. Todhunter; 1889, Peano publica su obra *Arithmetices Principia*; en 1901 aparece la segunda edición del segundo volumen de William Rowan Hamilton titulada *Los Cuaterniones*; también en ese año se publica la primer traducción inglesa de la obra de Richard Dedekind titulada *Ensayos sobre Teoría de Números*; en 1957 la Universidad de Minnesota publica la obra de Oystein Ore titulada *Niels Henri Abel*; en 1963 la Sociedad Matemática Americana en colaboración con el MIT publican la traducción inglesa de la obra conjunta de Alexandrov, Kolmogorov y Laurentiev originalmente publicada en ruso titulada *Las Matemáticas: su contenido, métodos y significado*. Son sólo algunos títulos cuyos años de publicación se relacionan con 2019 por haber tenido la misma secuencia de días en el calendario (1872 a partir del 1 de marzo); es decir que la secuencia calendárica de $2019 \rightarrow S_{seq} \equiv 0 \bmod 7$ para los años mencionados. Con este buen augurio publicamos este primer número que ponemos a consideración de nuestros lectores. Deseamos que el propósito central de esta publicación sea logrado y que sea de interés y utilidad para nuestros lectores.

Los editores.

Apuntes sobre dos teoremas de la Geometría Diferencial.

Francisco Guillermo Herrera Armendia.

Escuela Normal Superior de México, Manuel Salazar 201 Colonia Ex-hacienda del Rosario, Azcapotzalco,
02420 CDMX, México.
harmendia@gmail.com

Resumen- El estudio analítico de las curvas y las superficies ha tenido un amplio desarrollo dentro de la matemática en sí, y también ha contribuido a sustentar importantes enunciados en la física – matemática. Se analizan dos teoremas de importancia en el sentido geométrico – diferencial, con el propósito de considerar su valor axiomático en el estudio de la matemática moderna.

Palabras Clave- Geometría diferencial. Teorema Egregium. Teorema Gauss – Bonnet.

Abstract- The analytical study of the curves and surfaces has had an extensive development within mathematics itself, and has also contributed to sustain heavy set forth in physics - mathematics. It is discussed the two theorems of importance in the geometric sense - differential, with the purpose to consider its axiomatic value to study the modern mathematics.

Keywords- Differential Geometry. Egregium theorem. Gauss theorem - Bonnet..

Stelutelwoorden- Differentiaalmeetkunde. Stelling van Egregium. Stelling van Gauss - Bonnet.

Zusammenfassung- Die analytische Untersuchung der Kurven und Flächen hat eine umfangreiche Entwicklung innerhalb der Mathematik selbst hatte und hat auch dazu beigetragen, Schwere, die in der Physik - Mathematik gesetzt erhalten. Es ist den beiden theoreme der Bedeutung im geometrischen Sinne - Differential diskutiert, mit dem Ziel die axiomatische Wert in das Studium der modernen Mathematik zu betrachten.

Mathematical Subject Classification: 53-02.

I. INTRODUCCIÓN

Un primer intento por definir la curvatura en un punto P de una superficie S en un espacio tridimensional fue expresarlo en términos de la curvatura de las curvas del plano, tomando en consideración las secciones de S como planos a través de la normal en P [1]. Desde luego que planos normales diferentes a la superficie en P pueden intersectar la superficie en curvas muy diferentes que incluyen curvaturas también distintas. Sin embargo, entre todas estas curvas existe una de máxima curvatura, y desde luego, una de mínima curvatura (que puede ser negativa debido al convenio de asignar una curvatura de acuerdo al lado sobre el cual el centro de curvatura se extiende. Leonard Euler en 1760 mostró que estas dos curvaturas κ_1 y κ_2 denominadas curvaturas principales, se forman en secciones perpendiculares y que, juntas, determinan la curvatura κ en una sección determinada con un ángulo α a una de las secciones principales con base en la expresión: $\kappa = \kappa_1 \cos^2 \alpha + \kappa_2 \sin^2 \alpha$. Es así que se tiene una condición

suficiente y necesaria, siempre y cuando la curvatura de las superficies se subordine a la curvatura de

las curvas en el plano. Una idea mucho más profunda, se le debe a Gauss en el desarrollo de su trabajo en geodesia (concretamente en agrimensura y cartografía), en estos términos: la curvatura de una superficie se puede detectar intrínsecamente, es decir, por las medidas que se realizan completamente sobre la superficie. Así, la curvatura de la tierra se conoció con base en las medidas realizadas por exploradores y expertos que en esa época no tenían una perspectiva desde una altura adecuada (como en la actualidad). En 1827, Gauss realizó el extraordinario descubrimiento de que la cantidad $\kappa_1 \kappa_2$ se pueden definir intrínsecamente, por ello pueden ocuparse como una medida intrínseca de curvatura. Estaba tan orgulloso de su resultado que lo llamó Theorema Egregium o Teorema Excelente, y es particularmente interesante que en particular que $\kappa_1 \kappa_2$ llamada la Curvatura Gaussiana no es afectada por flexión alguna (sin arrugas ni estiramientos). El plano, por ejemplo conserva $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$, es decir una curvatura Gaussiana cero. De tal forma que es posible obtener cualquier superficie doblando el plano, como por ejemplo, el cilindro. Es posible verificar el Teorema Excelente o destacable es este caso debido a que una de las curvaturas principales de un cilindro es obviamente cero. Las superficies S_1, S_2 obtenidas unas de otras por medio del doblar se dice que son isométricas, más precisamente, S_1, S_2 son isométricas si existe una correspondencia uno a uno entre los puntos P_1 de S_1 y los puntos P_2 de S_2 de tal manera que la distancia entre P_1 y P'_1 en S_1 sea exactamente igual a la distancia entre P_2 y P'_2 en S_2 y donde las distancias se miden dentro de las respectivas superficies. En un estado más preciso del teorema, se tiene que si S_1, S_2 son isométricos, entonces S_1, S_2 tienen la misma curvatura Gaussiana en los puntos correspondientes; sin embargo, la afirmación inversa no es verdadera: existen superficies S_1, S_2 que no son isométricas a pesar de que exista una correspondencia continua y uno a uno entre ellas, por lo que la curvatura Gaussiana es la misma en los puntos correspondientes. Para superficies de curvatura Gaussiana constante existe un mejor acuerdo entre isometría y curvatura (Gaussiana). Tiempo después se discute una interesante generalización de las superficies curvadas conocida como el Teorema Gauss – Bonnet, cuya idea central se refiere a que la superficie curvada κ se puede reemplazar por la curvatura geodésica κ_g , propuesto por

Bonnet en 1848 con base en la proposición: $\int_C \kappa_g ds = 2\pi - \iint_R \kappa_1 \kappa_2 dA$, donde A denota el área, R indica la región encerrada por C . A este respecto, Gauss publicó solamente un caso especial, o más bien el límite de un caso especial en el que C es un triángulo geodésico. En este caso, $\kappa_g = 0$ a lo largo de los lados de C , además κ_g se vuelve infinita en las esquinas cuya consecuencia se denomina exceso angular y que Gauss dio a conocer en 1827 su resultado: *exceso angular* = $\iint_R \kappa_1 \kappa_2 dA$. Si se observa a detalle, se infiere que la integral de la curvatura Gaussiana tiene un significado geométrico más elemental que la curvatura $\kappa_1 \kappa_2$. En una carta publicada por Gauss en 1846 afirmó ya haber conocido el término *exceso angular* desde 1794.

II. EL TEOREMA EGREGIUM DE GAUSS.

Definición 1. Sea f una inmersión de una variedad diferenciable m -dimensional M de clase C^r en un espacio Euclidiano n -dimensional E^n [2].

Esta condición permite que f sea un mapeo diferencial de clase C^r , tal que la diferencial df_p es inyectiva en cualquier punto p de M . Además, la imagen $f(M)$ no es necesariamente una sub-variedad de E^n . Por ello, el par (M, f) se denomina sub-variedad inmersa (o también superficie) de E^n . Si $m = 1$, entonces es la curva de E^n ; si $m = n - 1$, es la hipersuperficie en E^n .

Las variedades diferenciables o geometría diferencial de las curvas y las superficies, cuando $n = 2; n = 3$ son también casos importantes de estudio en este contexto.

En este sentido, un difeomorfismo entre dos superficies que conservan la longitud de arco es equivalente a la condición de que las primeras cantidades fundamentales de las superficies coinciden en cada par de puntos correspondientes, dado que se han introducido parámetros sobre las dos superficies, así que los puntos correspondientes conservan los mismos valores paramétricos. En este caso, tenemos una isometría.

A partir de la ecuación de Gauss podemos observar que el total de la curvatura depende solamente de las primeras cantidades fundamentales. Entonces K es una cantidad que es conservada bajo mapeos isométricos (Teorema egregium, o destacable, de Gauss).

Definición 2. $\bar{E}_1 = F_*(E_1), \bar{E}_2 = F_*(E_2)$. Debido a que F_* conserva el punto producto, $\bar{E}_1, \bar{E}_2$ es un campo de referencia sobre $\bar{M}$, puesto que:

$$\bar{E}_i \cdot \bar{E}_j = F_*(E)_i \cdot F_*(E)_j = E_i \cdot E_j = \delta_{ij}. \quad (1)$$

Lema 1. Sea $F: M \rightarrow \bar{M}$ una isometría, y E_1, E_2 un campo de referencia tangencial sobre M . Si $\bar{E}_1, \bar{E}_2$ es el campo de referencia transferido sobre $\bar{M}$, entonces tenemos dos condiciones:

$$(1) \quad \theta_1 = F^*(\bar{\theta})_1, \theta_2 = F^*(\bar{\theta})_2$$

$$\omega_{12} = F^*(\bar{\omega})_{12}.$$

Prueba. (1) Es suficiente probar que θ_i y $F^*(\bar{\theta})_i$ poseen el mismo valor sobre E_1 y E_2 . Sin embargo, para $1 \leq i, j \leq 2$ se tiene:

$$F^*(\bar{\theta}_i)(E_j) = \bar{\theta}_i(F_*E_j) = \bar{\theta}_i(\bar{E}_j) = \delta_{ij} = \theta_i(E_j). \quad (2)$$

(2). Es necesario tomar en cuenta la ecuación estructural $d\bar{\theta}_1 = \bar{\omega}_{12} \wedge \bar{\theta}_2$ sobre $\bar{M}$. Al aplicar F^* , se tiene:

$$d(F^*\bar{\theta}_1) = F^*(d\bar{\theta}_1) = F^*(\bar{\omega}_{12}) \wedge F^*(\bar{\theta}_2), \quad \text{por el concepto de mapeo de superficies.}$$

De ello, y por (1), se tiene que:

$$d(\theta_1) = F^*(\bar{\omega}_{12}) \wedge \theta_2. \quad (3)$$

La otra ecuación estructural:

$$d\bar{\theta}_2 = \bar{\omega}_{21} \wedge \bar{\theta}_1 \quad (4)$$

Genera una ecuación correspondiente:

$$d\theta_1 = F^*(\bar{\omega}_{12}) \wedge \theta_2 \quad (5)$$

$$d\theta_2 = F^*(\bar{\omega}_{21}) \wedge \theta_1 \quad (6)$$

Por esta razón (2) es una consecuencia inmediata de la propiedad de unicidad, puesto que la forma de conexión $\omega_{12} = -\omega_{21}$ es la única 1-forma que satisface las primeras ecuaciones estructurales:

$$d\theta_1 = \omega_{12} \wedge \theta_2; \quad d\theta_2 = \omega_{21} \wedge \theta_1.$$

El enunciado del Teorema egregium de Gauss, sostiene que [3]:

Teorema 1.

Una curvatura Gaussiana es una invariante isométrica, es decir: Si $F: M \rightarrow \bar{M}$ es una isometría, entonces $K(p) = \bar{K}(F(p))$ para cualquier punto p en M .

Prueba. Para un punto arbitrario p de M se selecciona un campo de referencia tangente E_1, E_2 en alguna vecindad de p y se transfiere vía F_* hacia $\bar{E}_1, \bar{E}_2$ sobre $\bar{M}$. Entonces, $F^*(\bar{\omega}_{12}) = \omega_{12}$ por lema 1. Además, $d\bar{\omega}_{12} = -\bar{K} \bar{\theta}_1 \wedge \bar{\theta}_2$, por ser la segunda ecuación estructural y derivar de ella una nueva interpretación de curvatura Gaussiana: las ω_{12} representan medidas del rango de rotación del campo de referencia tangente E_1 y E_2 , puesto que K determina la derivada exterior $d\omega_{12}$ y se transforma en un tipo de "segunda derivada" de E_1, E_2 .

Al aplicar F^* a esta última ecuación, y como consecuencia de los resultados del mapeo de superficies, se tiene:

$$d(F^*\bar{\omega}_{12}) = F^*(d\bar{\omega}_{12}) = -F^*(\bar{K})F^*(\bar{\theta}_1) \wedge F^*(\bar{\theta}_2) \quad (7)$$

En que $F^*(\bar{K})$ es simplemente la función compuesta $\bar{K}(F)$. Así, con base en el Lema 1:

$$d\omega_{12} = -\bar{K}(F)\theta_1 \wedge \theta_2. \quad (8)$$

La comparación con $d\omega_{12} = -K\theta_1 \wedge \theta_2$ establece $K = \bar{K}(F)$, y de ello, en particular:
 $K(p) = \bar{K}(F(p))$.

III. CURVATURA TOTAL GAUSSIANA.

En otro sentido Iyanaga afirma que un campo vectorial $\lambda^\alpha(t)x_\alpha$ definido a lo largo de la curva $u^\alpha = u^\alpha(t)$ sobre una superficie es paralela en el sentido de Levi – Civita a lo largo de la curva si su derivada covariante a lo largo de la curva se desvanece, es decir:

$$\frac{\delta \lambda^\alpha}{dt} = \frac{d\lambda^\alpha}{dt} + \frac{\{\beta\gamma\}^\alpha \lambda^\beta du^\gamma}{dt} = 0 \quad (9)$$

Sea ρ la curvatura sobre una curva C de clase C^2 sobre una superficie S de clase C^2 y sea σ el ángulo entre la binormal de C y la normal de S en el mismo punto. Entonces, $\rho_g = \rho \cos \sigma$ es una cantidad perteneciente a la geometría sobre una superficie y se denomina curvatura geodésica de la curva en el punto. Así, una curva con curvatura geodésica desvaneciente se denomina geodésica, que satisface las ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d^2 u^\alpha}{ds^2} + \{\beta\gamma\}^\alpha \frac{du^\beta}{ds} \frac{du^\gamma}{ds} = 0 \quad (10)$$

Así, el desarrollo de una geodésica es una línea recta (Variedades Riemannianas). Es necesario considerar el dominio limitado orientable D simplemente conectado sobre una superficie, tal que el límite de D es una curva simple C cerrada que consiste de un número finito de arcos de clase C^2 .

Al denotar por α_i , ($i = 1, 2, \dots, m$) a los ángulos externos en los vértices del polígono curvilíneo, se observa lo siguiente:

$$\int_C \rho_g ds + \sum_{i=1}^m \alpha_i + \iint_D K d\alpha = 2\pi \quad (11)$$

Este enunciado es conocido como la fórmula de Gauss – Bonnet. Si todos los arcos de C son geodésicos, se tiene:

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i + \iint_D K d\alpha = 2\pi \quad (12)$$

Al observar esta expresión, se advierte que implica como casos especiales dos teoremas bien conocidos de la geometría euclidiana y de la trigonometría esférica, que son: a) la suma de los ángulos interiores de todo triángulo es igual a π ; el área de un triángulo esférico es proporcional a su exceso esférico. Además, también se relaciona con la siguiente proposición: sobre cualquier superficie orientada cerrada tenemos que: $\iint K d\alpha = 2\pi\chi$, en que χ representa la característica Euleriana de la superficie, de modo que $\iint K d\alpha$ es la integral de curvatura o curvatura total Gaussiana.

IV. EL TEOREMA GAUSS – BONNET.

Se ha observado con anterioridad que la curvatura Gaussiana K de una superficie geométrica M tiene gran influencia sobre otras características geométricas de M , como son las paralelas, la translación, la geodésica, las isometrías y sin lugar a dudas, la forma de M si se da el caso que está en E^3 , como lo propone O'Neill. Es más, el pensamiento topológico es profundamente influenciado por esta curvatura, sobre todo en el concepto de topología conformacional de M , cuyas propiedades son completamente independientes de la estructura geométrica particular de M . La idea principal de esta situación es un teorema relacionado con la curvatura total de un bi – segmento (2-segmento) con la cantidad total de giro de la curva límite. Para una curva arbitraria α en M , la curvatura geodésica explica su rango de giro relativo a la longitud de arco. De esta forma, para evaluar la cantidad total que α gira, es necesario integrar con respecto a la longitud de arco.

Definición 3. Sea $\alpha: [a, b] \rightarrow M$ un segmento curvo regular en una superficie geométrica orientada M . La curvatura total geodésica $\int_\alpha K_g ds$ de α es:

$$\int_{s(a)}^{s(b)} K_g(s) ds \quad (13)$$

Donde $K_g(s)$ es la curvatura geodésica de una reparametrización unidad – velocidad de α .

La curvatura total geodésica de α en M es una analogía de la curvatura total Gaussiana de una superficie en E^3 .

Lema 2. Sea $\alpha: [a, b] \rightarrow M$ un segmento curvo regular en una región de M orientada por un campo de referencia E_1, E_2 , entonces:

$$\int_\alpha K_g ds = \varphi(b) - \varphi(a) + \int_\alpha \omega_{12} \quad (14)$$

Donde φ es un ángulo función desde E_1 hasta α' hasta α , y ω_{12} es la forma de conexión de E_1, E_2 .

Prueba. Ninguno de estos términos son afectados por la reparametrización que conserva la orientación, por ello α representa una curva de unidad – velocidad. El resultado obtenido se demuestra con el siguiente argumento: β representa una curva de unidad – velocidad en una región orientada por un campo de referencia E_1, E_2 ; además, si φ es una función angular desde E_1 y hasta β' , a través de β , entonces:

$$K_g = \frac{d\varphi}{ds} + \omega_{12}(\beta'). \quad (15)$$

Y que a su vez se apoya en la definición de función angular. ■

Es necesario imponer el requerimiento más riguroso. Sea x un elemento uno a uno y además regular sobre el límite en

R . En otros términos, equivale a afirmar que $x: R \rightarrow M$ es la restricción a R de una ruta definida sobre algún conjunto abierto que contiene a R . Ahora, cuando x es un bi-segmento (2-segmento) regular, uno a uno, las curvas de sus aristas $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ son regulares uno a uno y podemos pensar que el límite $\vartheta x = \alpha + \beta - \gamma - \delta$ como una simple curva rota que envuelve la región rectangular $x(R)$. Esta afirmación se argumenta con la siguiente definición:

Sea $x: R \rightarrow M$ un bi-segmento (2-segmento) en M con R el rectángulo cerrado $a \leq u \leq b, c \leq v \leq d$. Las aristas curvadas de x son el uni-segmento (1-segmento) $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, tales que:

$$\begin{aligned}\alpha(u) &= x(u, c) \\ \beta(v) &= x(b, v) \\ \gamma(u) &= x(u, d) \\ \delta(v) &= x(a, v)\end{aligned}$$

Entonces, el límite ϑx del bi-segmento (2-segmento) x es la expresión formal:

$$\vartheta(x) = \alpha + \beta - \gamma - \delta. \quad (16)$$

Estos cuatro segmentos curvados son el resultado de haber considerado la función $x: R \rightarrow M$ solamente sobre las cuatro líneas segmento que comprimen el límite del rectángulo R . El signo operador “menos” que antecede a γ, δ en $\vartheta(x)$, nos recuerda que γ, δ se deben “reservar” para proporcionar un recorrido consistente alrededor de la parte curvada de R y también de x . Entonces, si ϕ es una uni-forma (1-forma) sobre M , la integral de ϕ sobre el límite de x se define así:

$$\int_{\vartheta x} \phi = \int_{\alpha} \phi + \int_{\beta} \phi - \int_{\gamma} \phi - \int_{\delta} \phi \quad (17)$$

Se llega al momento de definir la curvatura geodésica total de $\vartheta(x)$. Esta definición muestra que el total de la curvatura geodésica de una curva es simplemente el ángulo total que gira la tangente unitaria T (relativo a la longitud de arco). Pero para recorrer todo el camino alrededor, se tiene que:

$$\vartheta(x) = \alpha + \beta - \gamma - \delta \quad (18)$$

No solamente se obtiene el total de giro en las curvas de borde, es decir:

$$\begin{aligned}\int_{\vartheta x} K_g ds &= \int_{\alpha} K_g ds + \int_{\beta} K_g ds + \int_{-\gamma} K_g ds + \int_{-\delta} K_g ds \\ &= \int_{\alpha} K_g ds + \int_{\beta} K_g ds - \int_{\gamma} K_g ds - \int_{\delta} K_g ds \quad (19)\end{aligned}$$

Además, también los ángulos a través de los que una unidad tangente T sobre $\vartheta(x)$ debería girar a las cuatro esquinas de la región rectangular $x(R)$. Así, se tiene:

$$R: a \leq u \leq b, c \leq v \leq d$$

Para estas “esquinas”

$$\begin{aligned}p_1 &= x(a, c), & p_2 &= x(b, c), & p_3 &= x(b, d), \\ & & p_4 &= x(a, d)\end{aligned}$$

Todos ellos denominados los vértices de $x(R)$.

Así, se puede afirmar que, en general, si un segmento curvo regular α en una región orientada termina en el punto de inicio de otro segmento β , descritos como $\alpha(1) = \beta(0)$, entonces el ángulo de giro ε desde α hasta β es el ángulo orientado desde $\alpha'(1)$ a $\beta'(0)$ el cual es el más pequeño en valor absoluto. Para un bi-segmento (2-segmento), es posible utilizar la orientación determinada por x , esto es, el área contenida en dM tal que $dM(x_u, x_v) > 0$, para fijar, de alguna manera, una terminología que es familiar en el caso de un polígono en el plano.

Definición 4. Sea $x: R \rightarrow M$ un bi-segmento (2-segmento) regular uno a uno, con vértices p_1, p_2, p_3, p_4 . El ángulo exterior ε de x en p_j ($1 \leq j \leq 4$) es el ángulo de giro en p_j derivado de las curvas de las aristas $\alpha, \beta, -\gamma, -\delta, \alpha, \dots$, en orden de ocurrencia en $\vartheta(x)$. El ángulo interior ι_j de x en p_j es $\pi - \varepsilon_j$. Específicamente, los ángulos exteriores pueden fácilmente expresarse en términos de las coordenadas angulares usuales ϑ desde x_u hasta x_v ($0 < \vartheta < \pi$), de esta forma:

$$\varepsilon_1 = \pi - \vartheta_1, \varepsilon_2 = \vartheta_2, \varepsilon_3 = \pi - \vartheta_3, \varepsilon_4 = \vartheta_4 \quad (20)$$

Donde ϑ_j representa la coordenada angular en el vértice p_j .

Teorema 2.

Sea $x: R \rightarrow M$ bi-segmento (2-segmento) regular uno a uno en una superficie geométrica M . Si dM es la forma del área sobre $x(R)$ determinada por x , entonces:

$$\iint_x K dM + \int_{\vartheta x} K_g ds + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4) = 2\pi \quad (21)$$

El primer sumando de la expresión corresponde a una doble integral y representa la curvatura total Gaussiana de x , mientras que el segundo sumando que corresponde a una integral simple, denota la curvatura total Gaussiana de ϑx .

Es importante aclarar que la curvatura geodésica y los ángulos exteriores utilizan la orientación de $x(R)$ dadas por dM , en que $dM(x_u, x_v) > 0$. Es de notarse que M en sí, no requiere orientarse e inclusive ser orientable.

Se denomina a este resultado la fórmula Gauss – Bonnet con ángulos exteriores. Puesto que $\varepsilon_j = \pi - \iota_j$ para $1 \leq j \leq 4$, la expresión puede reescribirse de esta forma:

$$\iint_x K dM + \int_{\vartheta x} K_g ds = (\iota_1 + \iota_2 + \iota_3 + \iota_4) = 2\pi \quad (22)$$

En términos de los ángulos interiores de $x(R)$.

Prueba.

Sea $E_1 = \frac{x_u}{\sqrt{E}}$ sobre la región $x(R)$. Entonces, sea E_2 el campo vectorial único tal que E_1, E_2 es un campo de referencia con $dM(E_1, E_2) = +1$. Así, la segunda ecuación estructural tiene la forma:

$d\omega_{12} = -K\theta_1 \wedge \theta_2 = -K dM$, con base en el Teorema de Stroke, que enuncia lo siguiente:

Si ϕ representa una uni-forma (1-forma) sobre M , y sea $x: R \rightarrow M$ un bi-segmento (2-segmento), entonces:
 $\iint_x d\phi = \int_{\vartheta x} \phi$.

Por ello, ahora tenemos la siguiente expresión:

$$\iint_x K dM + \int_{\vartheta x} \omega_{12} = 0 \quad (23)$$

Entonces, por **Lema 2**, tenemos:

$$\int_{\vartheta x} \omega_{12} = \int_\alpha \omega_{12} + \int_\beta \omega_{12} - \int_\gamma \omega_{12} - \int_\delta \omega_{12} \quad (24)$$

Ahora, sobre α tenemos $\alpha' = x_u = \sqrt{E} E_1$, así que el ángulo φ desde E_1 hasta α' es idéntico a cero. También, por **Lema 2**:

$$\int_\alpha \omega_{12} = \int_\alpha K_g ds \quad (25)$$

Ahora, para el caso: $\int_\delta \omega_{12}$, donde al ángulo φ , desde $E_1 = \frac{x_u}{\sqrt{E}}$ hasta $\vartheta' = x_v$ es justamente la coordenada angular ϑ desde x_u a x_v . Una vez más, por el **Lema 2**, se obtiene:

$$\int_\vartheta K_g ds = \vartheta_4 - \vartheta_1 + \int_\vartheta \omega_{12} \quad (26)$$

Donde, $0 < \vartheta_j < \pi$ es la coordenada angular en el vértice p_j , de x , ($1 \leq j \leq 4$). Sin embargo, como $\vartheta_1 = \pi - \varepsilon_1$ y $\vartheta_4 = \varepsilon_4$, se reescribe la expresión:

$$\int_\vartheta \omega_{12} = \pi - \varepsilon_1 - \varepsilon_4 + \int_\vartheta K_g ds \quad (27)$$

Expresión que posee una forma similar:

$$\int_\beta \omega_{12} = -\pi + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \int_\beta K_g ds \quad (28)$$

o también:

$$\int_\gamma \omega_{12} = \int_\gamma K_g ds \quad (29)$$

De esta manera, (24) se reescribe de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \int_{\vartheta x} \omega_{12} &= \int_\alpha K_g ds + \int_\beta K_g ds - \int_\gamma K_g ds - \\ &\int_\delta K_g ds - 2\pi + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4) = \\ &= \int_{\vartheta x} K_g ds - 2\pi + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4). \end{aligned} \quad (30)$$

Como un complemento, es posible sustituir esta última expresión en (23).

CONCLUSIONES

Pese a que las ideas expuestas anteriormente ya se habían intentado explicar como es el caso de Thomas Harriot en 1603, en concordancia con la investigación de Stillwell, éstas fueron tomando forma al paso de los años, hasta su actual interpretación. Es así que se han descrito dos teoremas de la Geometría Diferencial que son importantes en sí, pero además han dado mucho sustento en la física teórica, como lo es el concepto de geodésica, definido como la línea de menor longitud entre dos puntos en el espacio-tiempo [4]. Además, en el estudio del Análisis tensorial, la curvatura gaussiana sustenta el estudio de las densidades tensoriales (Richards, 1959) aspecto interesante dentro de la física matemática; en el estudio de las propiedades especiales de Holmes – Thompson el tema estudiado en estas líneas también sustenta algunas ideas de la Geometría de Minkowski [5].

REFERENCIAS

- [1] Stillwell, J. (2004). Mathematics and its History. Springer – Verlag. N. Y.
- [2] Iyanaga, S. (1977) Encyclopedic Dictionary of Mathematics. The MIT Press. Cambridge, M. A.
- [3] O'Neill, B. (1966). Elementary Differential Geometry. Academic Press. N. Y.
- [4] Richards, P. (1959). Manual of Mathematical Physics. Pergamon Press. Belfast.
- [5] Tribble, A. (1996). Princeton Guide to Advanced Physics. Princeton University Press. N. J.
- [6] Thompson, A.C. (1996). Minkowski Geometry. Cambridge University Press. Cambridge. MA.

BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

- Stillwell, J. (2004). Mathematics and its History. Springer – Verlag. N. Y.
- Четверухин, Н. Ф. (1961). Проективная Геометрия. Физико-Математической. Литературы. Москва.
- Doneddu, A. (1979). Análisis y Geometría Diferencial. Colección Ciencia y Técnica Aguilar. Madrid.
- Eddington, A. S. (1975). The Mathematical Theory of Relativity. Chelsea Publishing Company. N. Y.
- Engelsman, S. (1984). Families of Curves and the Origins of partial Differentiation.
- Mathematics Studies. North Holland Publishing. Amsterdam.
- Eves, H. (1995). College Geometry. Jones and Bartlett Edition.

N.Y.

Фавар, ж. (1960). Курс Локальной Дифференциальной
Геометрии. Иностранной. Литератур. Мосва.

Hu, S. T. (1969). Differentiable Manifolds. Hart Rinehart Winston
Edition. N. Y.

Lefschetz, S. (1950). L'Analysis Situs et la Géométrie Algébrique.
Gauthier – Villars. Paris.

Matos, T. & Wiederhold, P. (2017). Principios matemáticos para
ciencias exactas. Colofón. Ediciones Académicas de Matemáticas. Instituto
Avanzado de Cosmología. México.

Preston, E. (1932). Projective Differential Geometry of Curves
and Surfaces. The University of Chicago Science Series. Chicago, IL.

Шуликовский, в. и. (1963). Классическая Дифференциальная
Геометрия. Физико-Математической. Литературы. Москва.

Schouten, J. A. & Struik, D. J. (1935). Einführung in die Neueren
Methoden der DifferentialGeometrie. P. Noordhoff Verlag. Amsterdam.

Stoker, J. J. (1969). Differential Geometry. Wiley Interscience.
N. Y.

Diseño y construcción de un manipulador industrial de cinco grados de libertad: Modelado matemático y análisis del efector final.

Marcos Fajardo Rendón

Escuela Normal Superior de México, Manuel Salazar 201 Colonia Ex-hacienda del Rosario, Azcapotzalco, 02420 CDMX, México.
fajardoensm@gmail.com

Resumen- El presente artículo describe los resultados obtenidos al modelar matemáticamente, diseñar y manufacturar un prototipo de brazo robot del tipo manipulador vertical con cinco grados de libertad que permita la colocación de objetos en coordenadas con un gripper como efector final. La tarea de tomar y colocar un objeto consiste en considerar la coordenada del efector final del robot y la coordenada de la posición deseada en el espacio de trabajo. Se describe el diseño y modelo matemático de su cinemática directa; así como el análisis del movimiento de su efector final mediante la transformación del espacio cartesiano al de las articulaciones respecto a sus eslabones utilizando el algoritmo de parametrización matricial Denavit-Hartenberg (D-H) para cinemática directa, su validación y simulación en MATLAB para obtener las coordenadas del efector final. Posteriormente se describe el diseño y manufactura en PVC del modelado utilizando servomotores controlados por una tarjeta servocontroladora con GUI de diseño propio para experimentar y comparar los resultados del modelo matemático, y su simulación respecto al prototipo físico.

Palabras Clave- parametrización matricial, cinemática directa, parametrización Denavit-Hartenberg, robótica, metodología de manufactura.

Abstract- This paper describes the results in the modelling, design and build of a vertical manipulator robotic-arm prototype with 5-degree of freedom designed to perform a pick and place task with its gripper; considering the end-effector coordinate of the robot and the desired position coordinate in its workspace. This research describes a robot forward kinematics mathematical modeling and its gripper motion through a joint space analysis defined by the transformation from the cartesian space respect the joint space. The Denavit-Hartenberg (D-H) forward kinematics matrix technique is used to model the manipulator's links and joints to validate a design and simulate in MATLAB to get the robot's gripper coordinate. Based on the mathematical model the robotic arm was design and build using servomotors driven by a self design reprogrammable USB-HID servocontroller with a Window's GUI to experiment and compare results of the physical prototype, mathematical model and simulation.

Keywords- matrix setting, forward kinematics, Denavit-Hartenberg setting, robotics, manufactory methodology.

Mathematical Subject Classification: 70Q05

I. INTRODUCCIÓN

Los manipuladores industriales son robots antropomórficos articulados que desarrollan procesos de

manufactura programable mediante articulaciones formadas por motoredutores servocontrolados que brindan un torque conectados a eslabones logrando un movimiento de rotación o de desplazamiento traslacional.

La palabra diseño proviene del latín designare que significa “diseño o marcado”; por otro lado la ABET (2019) define al diseño de ingeniería como:

Engineering design is the process of devising a system, component, or process to meet desired needs. It is a decision-making process (often iterative), in which the basic sciences, mathematics, and the engineering sciences are applied to convert resources optimally to meet these stated needs [1].

Con base a lo anterior el presente estudio se centra en el diseño y modelado de un robot formado por una cadena cinemática de articulaciones más un efector final que colocará un objeto de una posición inicial a una final, su manufactura, construcción del prototipo físico articulado con servomotores y la realización de pruebas de control.

II. TEORÍA DE MATRICES

Las técnicas de modelado matemático mediante matrices surge desde la necesidad de querer representar fenómenos físicos en representaciones numéricas y se remontan a antes del siglo II A.C.[2], en un tratado hecho en China de la dinastía Han que data del 200 A.C llamado arte matemático el que describe métodos sobre matrices en un problema de combinatoria de granos resolviéndolo sobre un tablero divisible que permite encontrar la solución para un 3er tipo de grano, después para el 2º y después para el 1º mediante su sustitución recursiva en reversa; este método se conoce occidental y modernamente como eliminación Gaussiana y data del siglo XIX.

Autores como Cardano en in Ars Magna (1545) [3] indicó reglas para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales denominado *regula de modo* [4] y que llama a su vez *madre de reglas*, la cual sirve de base para la regla de Cramer de 2x2 dando un acercamiento a la noción determinante. En el libro Elementos de curvas (Jan De Witt, 1660) [5] se encuentra un extenso agregado en la versión en latín de La Géométrie (Descartes, 1637) que describe que la transformación de los

ejos se reduce a una ecuación dada para una cónica a su forma canónica sin la diagonalización matricial actual.

El concepto de resolución general de determinante data de 1683 en Japón con el tratado 隱題之法 (*Kaiindai no hō*: Método de solución de problemas ocultos) de Takakazu Shinsuke Seki [6] el cual también descubrió los números Bernoulli antes que el mismo Jacob Bernoulli diez años después en una carta de Leibniz a L'Hôpital se describe un sistema de ecuaciones sin la generalización de su contraparte oriental.

Leibniz [2] utilizó el término “resultante” para la combinatorias de sumas de términos de una determinante probando lo que es en esencia la regla de Cramer.

En 1730's Maclaurin escribe Treatise of algebra [7] (publicado hasta 1749) con la prueba por determinantes de la regla de Cramer de sistemas 2x2 y 3x3 y la descripción para 4x4.

En el paper Introduction to the analysis of algebraic curves (1750) Cramer [8] describe la regla general para sistemas $n \times n$.

En 1764 Bezout describe metodología para determinantes, continuado por Vandermonde en 1771; en 1772 Laplace discute la solución de sistemas de ecuaciones lineales por determinantes y acuñó el término [2].

En 1773 Lagrange [9] publica un trabajo de mecánica en donde se da la interpretación de un determinante.

Gauss usa el término determinante [10] en Disquisitiones arithmeticae (1801) [11] ya que determina las propiedades de la ecuación cuadrática describiendo el producto y la matriz inversa (1812) [12] desde los arreglos de coeficientes de formas cuadradas; en 1826 Cauchy [13] respecto a las formas cuadráticas en n variables utiliza el término *tableau* como matriz de coeficientes, diagonalización.

Kronecker [14] en 1850 y Weierstrass en 1860 trabajaron en el campo de transformación lineal de matrices; posteriormente Jacobi en 1841 algoritmizó las determinantes.

Cauchy en 1858 [2] publica *Memorias sobre teorías de matrices* con la primera definición abstracta de matriz y describe la propiedad aditiva, producto, producto escalar, e inversas y probó que una matriz satisface su propia ecuación característica en 2×2 y 3×3 pero es el teorema Cayley – Hamilton el que prueba 4x4 como cuaterniones.

Se define una matriz $\mathcal{M}$ de cuerpo $\mathbb{K}$ como un arreglo rectangular de m filas y n columnas como:

$$\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) = \{a_{ij}\} \mid a_{ij}, m, n \in \mathbb{R}; i = \{1 \dots m\}; j = \{1, \dots, n\}; \quad (1)$$

Considerando el sistema como un dominio $D \in \mathbb{Z}$ con m ecuaciones lineales y n indeterminadas $\{x_1 \dots x_n\}$ cuyos coeficientes en D es una ecuación [8]:

$$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = b \mid a_i, b \in D; i = \{1 \dots n\} \quad (2)$$

Análogamente:

$$a_{ij}, b_i, m, n \in \mathbb{R} \mid \forall i = \{1 \dots m\}; j = \{1 \dots n\} \quad (3)$$

Considerando $b_i \dots b_m$ como términos independientes del arreglo su arreglo se describe como:

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad (4)$$

El sistema (4) puede ser solucionado mediante un elemento s descrito como:

$$(s_1 \dots s_n) \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}_1 \times \dots \times \mathbb{R}_n \mid \forall i = \{1 \dots m\} \rightarrow a_{i1}s_1 + \dots + a_{in}s_n = b_i \quad (5)$$

Se denomina a (4) matriz de coeficientes $m \times (n + 1) \in \mathbb{R}$ del sistema de ecuaciones descrito en (2) y (3) determinado por los coeficientes de las indeterminadas y los términos independientes [8].

Así mismo:

$$\mathcal{M}1_{m,n}(\mathbb{K}) = \mathcal{M}2_{m,n}(\mathbb{K}) \Leftrightarrow [(m, n) \in \mathcal{M}1 \wedge \mathcal{M}2] \wedge (\mathcal{M}1, \mathcal{M}2 \in \mathbb{K}) \quad (6)$$

$$\mathcal{M}1_{m,n}(\mathbb{K}) + \mathcal{M}2_{m,n}(\mathbb{K}) \mid \mathcal{M}1 = \{a_{ij}\}, \mathcal{M}2 = \{b_{ij}\} = \mathcal{M}3_{m,n}(\mathbb{K}) = \{c_{ij}\}; c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}; \therefore \mathcal{M}1 + \mathcal{M}2 = \mathcal{M}3 \quad (7)$$

$$[\mathcal{M}1_{m,l} = \{a_{ij}\}] [\mathcal{M}2_{l,n} = \{b_{ij}\}] = \mathcal{M}3_{m,n} = \{c_{ij}\} = \sum_{k=1}^l a_{ik} b_{kj} \therefore \mathcal{M}1 \cdot \mathcal{M}2 = \mathcal{M}3 \quad (8)$$

$$(\mathcal{M}1)(\alpha) \mid (\alpha \in \mathbb{R}; \mathcal{M}2 = \alpha \mathcal{M}1 = c_{ij} \therefore \mathcal{M}1(\alpha) = \alpha \cdot a_{ij} \quad (9)$$

Cumpléndose la propiedad asociativa:

$$(\mathcal{M}1 + \mathcal{M}2) + \mathcal{M}3 = \mathcal{M}1 + (\mathcal{M}2 + \mathcal{M}3) \text{ debido a: } (\{a_{ij}\} + \{b_{ij}\}) + \{c_{ij}\} = \{a_{ij}\} + (\{b_{ij}\} + \{c_{ij}\}) \text{ y que } \{a_{ij}\}, \{b_{ij}\}, \{c_{ij}\} \in \mathbb{K} \quad (10)$$

Conmutativa:

$$\mathcal{M}1 + \mathcal{M}2 = \mathcal{M}2 + \mathcal{M}1 \text{ debido a: } \{a_{ij}\} + \{b_{ij}\} = \{b_{ij}\} + \{a_{ij}\} \text{ siendo: } \{a_{ij}\}, \{b_{ij}\}, \{c_{ij}\} \in \mathbb{K} \quad (11)$$

Así mismo:

$$\mathcal{M}1 (\mathcal{M}2 + \mathcal{M}3) = \mathcal{M}1 \mathcal{M}2 + \mathcal{M}1 \mathcal{M}3 \quad (12)$$

$$(\mathcal{M}2 + \mathcal{M}3)\mathcal{M}4 = \mathcal{M}2\mathcal{M}4 + \mathcal{M}3\mathcal{M}4 \quad (13)$$

$$\mathcal{M}1(\mathcal{M}2\mathcal{M}3) = (\mathcal{M}1\mathcal{M}2)\mathcal{M}3 \quad (14)$$

Siendo que $\mathcal{M}1.\mathcal{M}2 \neq \mathcal{M}2.\mathcal{M}1$.

Cuando $\mathcal{M}1.\mathcal{M}2 = \mathcal{M}2.\mathcal{M}1$ se describe una conmutación matricial [8].

Para la matriz asociada a una transformación lineal se debe establecer que éstas son algunas funciones que se encuentran dentro de espacios vectoriales -asociados en mecánica a los ejes de coordenadas donde se desplazan los dispositivos- que permiten obtener una descripción respecto a los sistemas de ecuaciones lineales.

Un espacio vectorial queda descrito como $\mathbb{R}^n \wedge \mathbb{C}^n \mid n \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{C}$; $\mathbb{R}$: *espacio euclideo*; $\mathbb{C}$: *espacio unitario* $\Rightarrow \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \{x_i\}_{i=1}^n$; su magnitud se describe por:

$$|\vec{x}| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2} \quad (15)$$

Mientras que su sentido $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \wedge \vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \vee \mathbb{C}^n$; por lo que se pueden realizar las operaciones vectoriales por números $\alpha \in \mathbb{R} \vee \beta \in \mathbb{C}^n$:

$$\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \dots, \alpha x_n + \beta y_n) \quad (16)$$

Con sus propiedades:

$$\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}; \quad (17)$$

$$\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}; \quad (18)$$

$$\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}, (\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x} \quad (19)$$

La relación $\vec{x} \perp \vec{y} \Leftrightarrow (\vec{x}, \vec{y}) = 0$; siendo en el espacio vectorial:

$$\mathbb{R}^n \perp \mathbb{C}^n \Rightarrow (\vec{x} + \vec{y}) \equiv |\vec{x}||\vec{y}|\cos\theta = 0 \quad (20)$$

La transformación lineal [14] se describe con los componentes espacios vectoriales $V, W \in \mathbb{R}$; así mismo la función $T: V \rightarrow W$.

Es una transformación lineal:

$$T \leftrightarrow (\forall \vec{s}, \vec{s}') \in V \wedge \alpha \in \mathbb{R} \quad (21)$$

Con las propiedades de las funciones que describen como se componen los espacios vectoriales [14]:

$$T(\vec{s} + \vec{s}') = T(\vec{s}) + T(\vec{s}') \quad (22)$$

$$T(\alpha \cdot \vec{s}) = T \cdot \alpha(\vec{s}) \quad (23)$$

Mecánicamente se pueden representar un conjunto de escalares $a_{ij} \dots a_{ij}$ con comportamiento cinemático de

acuerdo a lo discutido en (1)-(20) a estos se les puede obtener una descripción $T(21)$ a través de una matriz $\mathcal{M}$ asociada a T manteniendo una base canónica de $\mathbb{K}^n$ y $\mathbb{K}^m$ denotada por la matriz de transformación $\mathcal{M}(T)$ [14].

$$\mathcal{M}(T) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \quad (24)$$

La matriz asociada $\mathcal{M}(T)$ a la identidad en $\mathbb{K}^n$ es la matriz de identidad $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Se especifica $\mathbb{K}$ como $\mathbb{R}$ para las descripciones mecánicas siguientes.

III. METODOLOGÍA

Las técnicas de modelado y diseño asistido por computadora (CAD) y manufactura asistida por computadora (CAM) permiten experimentar y llevar los modelos a sus límites [15]. El modelado y virtualización previo a la construcción física utilizando las técnicas de prototipado permiten comprobar el diseño mediante una simulación del comportamiento antes de su construcción física; evitando tener que invertir recursos de manufactura en un producto que podría fallar [16].

La metodología es aquella que describe al algoritmo de desarrollo del diseño de maquinaria Bonsiepe [17]; la seleccionada para el diseño fue la de Robert Norton [18], la cual describe que la misma es un proceso iterativo que contiene aspectos desde el diseño hasta la manufactura en 10 pasos; debiendo retornar a un paso anterior si llegara a fallar el actual ordenándolas en:

Identificación, Investigación preliminar, Planteamiento de objetivos, Especificaciones de desempeño, Ideación e invención, Análisis, Selección, Diseño detallado, Creación de prototipos-pruebas y Producción [18].

La metodología de manufactura descrita fue propuesta para obtener un prototipo funcional capaz de manipular un objeto seleccionando de una posición inicial a una final mediante el algoritmo anteriormente descrito descartando la producción, al ser una investigación académica sin fines de lucro; sin descartar la posibilidad de ser llevado a la manufactura de fabricación en serie.

IV. DESCRIPCIÓN DEL ROBOT

1.-Identificación de la necesidad: Debido a que diversos procesos industriales implican el desplazamiento de un objeto de una posición inicial a una final; así como el estudio del modelado matemático de su solución se propone el diseño, modelo matemático, manufactura y control de un manipulador industrial que reposicione un objeto. El objeto seleccionado será un dulce de 0.148 oz [19] de dimensiones $x \cdot y$ y se utilizará una matriz sobrepuesta segmentada en milímetros para comprobar las posiciones obtenidas. **2.-Investigación preliminar:** De acuerdo al vocabulario de la norma ISO 8373 [20] un manipulador industrial es:

machine in which the mechanism usually consists of a series of segments, jointed or sliding relative to one another, for the purpose of grasping and/or moving objects

(pieces or tools) usually in several degrees of freedom (p.1).

Al conjunto de articulaciones de un robot se denominan cadena cinemática [21]; siendo la última de ellas el efector final el cual es una “herramienta” pudiendo ser intercambiable en la mayoría de los manipuladores industriales por grippers (pinzas para atrapar objetos), estaciones de soldadura, cortadoras, suministradores y otros [20].

El modelado matemático de la cinemática del robot consistirá en el estudio de su movimiento descartando las fuerzas que lo causan.

La cinemática directa describe y determina la posición cartesiana y orientación de una cadena de coordenadas relacionadas y será la utilizada en el modelado del prototipo MATHBOT.

La cinemática inversa consiste en determinar las variables conjuntas respecto a una posición y orientación del efector final del robot.

En un diseño y modelado matemático mecánico se vuelve complejo respecto al número de GDL (grados de libertad) y mecanismos de efecto múltiple como son los desplazamientos espaciales y el número de efectores vinculados.

3.-Planteamiento de objetivos: Se propuso realizar el análisis del problema de reposicionamiento de un objeto y las características del objeto, modelar matemáticamente el manipulador industrial, simular el modelo matemático del manipulador.

Con base a lo anterior hacer un diseño CAD de la estructura y ensamble del prototipo modelad, seleccionar los servomotores y material adecuados.

Por último, manufacturar el prototipo, experimentar con el prototipo y comprobar que el prototipo se adecua al modelo.

4.-Especificaciones de desempeño: El manipulador industrial deberá posicionar un objeto de 0.148 oz [19] y medidas 30 mm por 20 mm de una posición inicial a una final pudiendo girar y rotar el objeto; no se abordará en la fuerza y velocidad debido a que para fines del artículo interesa sólo el modelado de la cinemática directa.

Se trabajará con el desempeño de la cadena cinemática directa de un robot de 5-GDL con servomotores controlados a construir; el modelado se realizará matemáticamente y se comprobará mediante una simulación en MATLAB procediendo con la metodología.

5.-Ideación e invención: Se propone el diseño de un manipulador industrial vertical denominado MATHBOT que debe ser conceptualizado como una cadena cinemática con 5 articulaciones o 6 si se considera al gripper como actuador final como se describe en la figura 1, en donde se pueden identificar las articulaciones y eslabones del manipulador industrial.

Los movimientos posibles de las articulaciones se describen en la figura 1 y tabla 1.

Para establecer los parámetros Denavit-Hartenberg [21] modelados en la figura 2 se asignarán valores de parametrización para el diseño descartando la articulación 4 “pitch” debido a que se mantendrá recta en el posicionamiento.

Se describe a θ como el desplazamiento respecto al eje Y, α respecto a X; a describe el desplazamiento respecto al centro de la base que sostiene al manipulador y D el desplazamiento de la articulación anterior.

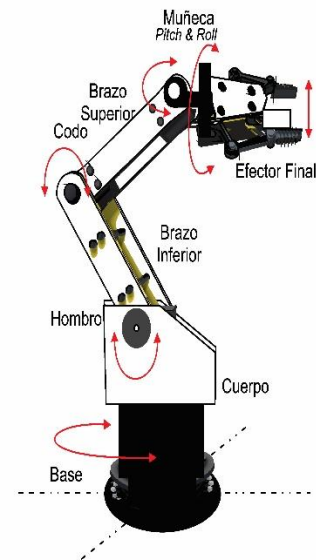


Fig. 1. Partes de un manipulador industrial.

Tabla 1. Movimientos del manipulador industrial

Eje	Nombre	Movimiento.
1	Base	Gira el cuerpo.
2	Hombro	Levanta y Baja el brazo inferior.
3	Codo	Levanta y Baja el brazo Superior.
4	Muñeca (Pitch)	Levanta y baja el Efector Final (Gripper).
5	Muñeca (Roll)	Rota el Efector Final (Gripper).

Para obtener la solución cinemática se modela cada unión comenzando con la base hasta el efector final asignando literales como se describe en la figura 2.

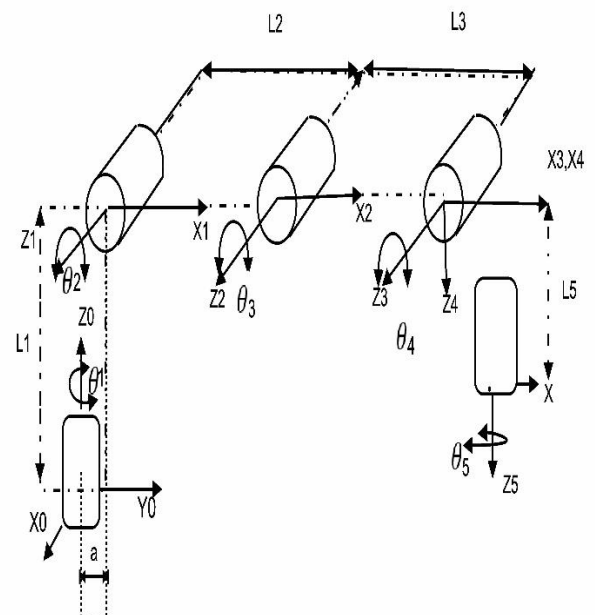


Fig. 2 Asignación de cada unión del robot descartando L4(Pitch).

Por lo anterior respecto a la θ en la articulación base al girar sobre Z que descansa.

Se utiliza L para describir el eslabón de trabajo y A para el adelantamiento o desplazamiento respecto a un eje.

La figura 3 describe los parámetros y distancias a las que se encuentran los eslabones.

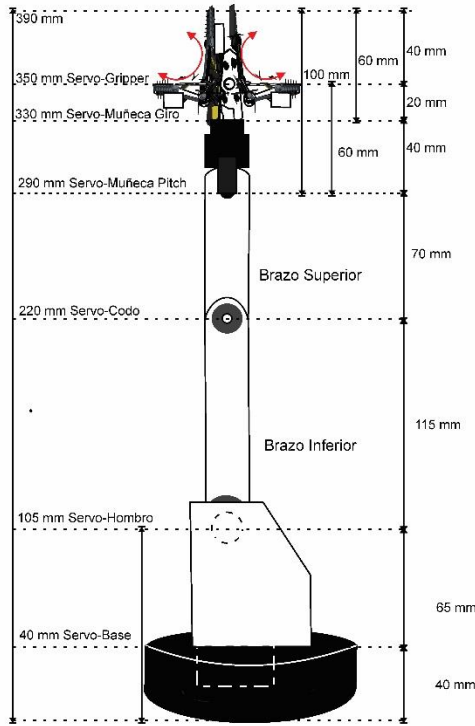


Fig. 3 Esquema de acuerdo con los valores establecidos por la parametrización Denavit-Hartenberg.

V. MODELADO MATEMÁTICO DEL ROBOT MEDIANTE METODOLOGÍA DENAVIT-HARTENBERG.

Continuando con la metodología descrita anteriormente se procede a realizar el paso siguiente:

6.-Análisis de las variables a considerar: Para estudiar el problema cinemático se utilizará el algoritmo Denavit-Hartenberg [21] que es utilizado para modelar las articulaciones y eslabones de los robots.

Para analizar el movimiento del robot MATHBOT se utilizará la cinemática directa para determinar la posición y orientación del gripper mediante el conocimiento de los valores dados para la variación de las articulaciones dadas en el diseño de la figura 3.

La representación D-H [21] anterior dependerá de cuatro parámetros de eslabones válidos:

- a_i (Longitud del eslabón) = La distancia desde Z_{i-1} a Z_i medido desde X_i .
- α_i (eslabón de giro de cadera) = El ángulo desde Z_{i-1} a Z_i medido desde X_i .
- d_i (Distancia articular) = La distancia desde X_{i-1} hasta X_i medido desde Z_{i-1} .
- θ_i (Joint angle) = El ángulo desde X_{i-1} a X_i medido desde Z_{i-1} .

La matriz de transformación homogénea [14] de 4x4 es utilizada para determinar la cinemática directa. Puede ser desarrollada de acuerdo al $\{i-1\} \wedge \{i\}$.

A continuación, se asignan los valores de parametrización para su diseño de la matriz:

Eslabón	θ	D	A	α
L {1}	q_1	10.5	0	$\frac{\pi}{2}$
L {2}	q_2	0	11.5	0
L {3}	q_3	0	7	0
L {4}	0	0	0	$\frac{\pi}{2}$
L {5}	q_5	4	0	0

(25)

Siendo correspondiente a una longitud máxima de 33 cm sin tomar en cuenta el actuador final (gripper abierto), queda el desplazamiento mediante:

0.-El origen es la coordenada (0,0,0) que es el piso sobre el que descansa el primer servomotor.

1.-El primer eslabón a considerar será el hombro denominado L {1}; tomando en cuenta el origen O hasta la unión con el primer eslabón, se encuentra adelantado en las ordenadas en $D=10.5\text{cm}$ en donde se colocará el primer servomotor con un $A=0$ y α de $\frac{\pi}{2}$.

2.-La base de la estructura L {2} donde descansa el codo y se encuentra sin rotación y adelantado respecto al eje de las ordenadas del piso en $A=11.5\text{cm}$.

3.- L {3} es el eslabón del codo al pitch y se encuentra desplazado en las ordenadas respecto a codo en $A=7\text{cm}$ sin rotación.

4.- L {4} es el eslabón del pitch al gripper de la muñeca y sólo se tomará el α de $\frac{\pi}{2}$ al estar unido al brazo superior por lo que se descarta q_4 .

5.- L {5} es el eslabón del roll de la muñeca junto con el servomotor del gripper hasta el comienzo de la pinza (palma) y se encuentra desplazado en las abscisas respecto a codo en $D=4\text{cm}$.

La altura máxima a considerar como mecanismo en la posición de la figura 3 será entonces de 33 cm del piso al origen del gripper abierto, pudiendo llegar con gripper cerrado a 39 cm.

Continuando con la metodología anterior se diseñó la siguiente descripción matemática que consiste en cuatro transformaciones básicas [14]:

$${}^i-1T = \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i C\alpha_i & S\theta_i S\alpha_i & a_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\theta_i & -C\theta_i S\alpha_i & a_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (26)$$

En donde $S\theta_i = \sin\theta_i$, $C\theta_i = \cos\theta_i$, $S\alpha_i = \sin\alpha_i$, $C\alpha_i = \cos\alpha_i$. Posteriormente se sustituyen los parámetros D-H de la tabla 1 en (25) y (26); la matriz de transmisión de cada eslabón es como sigue [21]:

$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & aC_1 \\ S_1 & 0 & -C_1 & aS_1 \\ 0 & 1 & C\alpha_1 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (27)$$

$${}^1T_2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & L_2 C_2 \\ S_1 & C_2 & -C_2 & L_2 S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (28)$$

$${}^2T_3 = \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & L_3 C_3 \\ S_3 & C_3 & 0 & L_3 S_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (29)$$

$${}^3T_5 = \begin{bmatrix} C_4 & 0 & S_4 & 0 \\ S_4 & 0 & -C_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (30)$$

$${}^4T_5 = \begin{bmatrix} C_5 & -S_5 & 0 & 0 \\ S_1 & C_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (31)$$

Para determinar la matriz de transformación del efector final T_e ; donde $T_e = T_5^0$.

El producto de las matrices (27) a (31) permite obtener la matriz:

$${}^0T_5 = {}^0T_1 * {}^1T_2 * {}^2T_3 * {}^3T_4 * {}^4T_5 \quad (32)$$

$${}^0T_5 = \begin{bmatrix} K_1 & K_4 & K_7 & P_x \\ K_2 & K_5 & K_8 & P_y \\ K_3 & K_6 & K_9 & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (33)$$

Donde:

$$K_1 = C_1 C_5 C_{2*3*4} + S_1 S_5$$

$$K_2 = -C_1 S_5 + S_1 C_{2*3*4} C_5$$

$$K_3 = C_5 S_{2*3*4}$$

$$K_4 = S_1 C_5 + C_1 C_{2*3*4} S_5$$

$$K_5 = -C_1 C_5 - S_1 C_{2*3*4} S_5$$

$$K_6 = -S_{2*3*4} S_5$$

$$K_7 = C_1 S_{2*3*4}$$

$$K_8 = S_1 S_{2*3*4}$$

$$K_9 = -C_{2*3*4}$$

Pudiendo obtener el valor del efector final coordinado en el espacio cartesiano de MATHBOT como:

$$\begin{bmatrix} px \\ py \\ pz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1(a + L_3 C_{2*3} + L_5 C_{2*3*4} + L_2 C_2) \\ S_1(a + L_3 C_{2*3} + L_5 C_{2*3*4} + L_2 C_2) \\ L_1 + L_3 S_{2*3} - L_5 C_{2*3*4} + L_2 S_2 \end{bmatrix} \quad (34)$$

Así mismo:

$$S_x = \sin \theta_x, C_x = \cos \theta_x, S_{xy} = \sin(\theta_x + \theta_y)$$

$$C_{xy} = \cos(\theta_x + \theta_y)$$

$$S_{xyz} = \sin(\theta_x + \theta_y + \theta_z)$$

$$C_{xyz} = \cos(\theta_x + \theta_y + \theta_z)$$

Sustituyendo los valores y realizando el producto matricial equivalente a la transformación D-H [21] se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 0 & -0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (35)$$

Sustituyendo los valores en la transformación Denavit Hartenberg se obtiene de igual forma la misma que en (35):

$$\begin{bmatrix} 0 & -0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (36)$$

Con el modelo matemático anteriormente descrito se pueden indicar ángulos para la cinemática directa como el de una posición de arranque en donde todos los servomotores sean energizados en forma de cadena lineal vertical serían la configuración [01 02 03 04 05] como:

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{\pi}{2} & 0 & \frac{\pi}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad (37)$$

El ángulo y posición del efector final (E) utilizando el modelo matemático (33) y descartando el efector final 05 quedaría como:

$$\begin{bmatrix} Ex & 0 \\ Ey & 0 \\ Ez & 33 \end{bmatrix} \quad (38)$$

Por otro lado, una posición desenergizada de los servomotores marcará lo contrario; es decir una configuración [01 02 03 04 05] como:

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{\pi}{2} & -3\frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{4} & 0 \end{bmatrix} \quad (39)$$

La posición del efector (E) queda susutituyendo (39) descartando el efector final θ_5 en (33) como:

$$\begin{bmatrix} Ex & 4.95 \\ Ey & 0 \\ Ez & 13.05 \end{bmatrix} \quad (40)$$

Para poder tomar un objeto la posición del gripper con el robot queda dada por una configuración $[\theta_1 \theta_2 \theta_3 \theta_4 \theta_5]$ de:

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{\pi}{2} & -3\frac{\pi}{4} & 3\frac{\pi}{4} & 0 \end{bmatrix} \quad (41)$$

(E) toma la posición al susutituir (41) en (33) descartando el efector final θ_5 como:

$$\begin{bmatrix} Ex & 8.95 \\ Ey & 0 \\ Ez & 17.05 \end{bmatrix} \quad (42)$$

Una vez tomado el objeto se girará sobre la base en la misma posición para dejar el objeto siendo la configuración angular $[\theta_1 \theta_2 \theta_3 \theta_4 \theta_5]$ dada por:

$$\begin{bmatrix} \pi & \frac{\pi}{2} & -3\frac{\pi}{4} & 3\frac{\pi}{4} & 0 \end{bmatrix} \quad (43)$$

El efector final (E) susutituyendo (43) en (33) descartando el efector final θ_5 coloca el objeto final mediante:

$$\begin{bmatrix} Ex & -8.95 \\ Ey & 0 \\ Ez & 17.05 \end{bmatrix} \quad (44)$$

7.-Selección: Con base a los valores descritos en el diseño y modelado matemático se diseñará un brazo robot de 5 eslabones, un gripper y seis GDL utilizando servomotores que puedan ocupar los espacios entre los eslabones manteniendo los tamaños.

De acuerdo al esquema de la figura 3 se seleccionó para el ensamble del diseño a manufacturar tres servomotoreductores Hitec HS-311, un DYNAMIXEL AX para la base y dos Servomotor Micro HD-1900A para el gripper debido a sus características y tamaño [22].

VI. CAD

De acuerdo al diseño de la figura 3 y al modelado matemático se procedió a realizar su simulación utilizando los parámetros Denavit-Hartenberg descritos anteriormente.

8.-Diseño detallado CAD: Siendo correspondiente el desplazamiento de acuerdo al modelado matemático y el

diseño de la figura 3, se diseñó mediante AutoCAD los eslabones tomando en cuenta los servomotores anteriormente descritos utilizando los siguientes parámetros:

El origen (piso) como coordenada (0,0,0); el hombro L {1} con $D=10.5\text{cm}$ con rotado en $\frac{\pi}{2}$ para α ; la base L {2} adelantado a las abscisas en $A=4\text{ cm}$, como se describe en la figura 4.

El eslabón del codo L {3} está desplazado a las ordenadas hombro en $A=7\text{ cm}$ como se describe en la figura 5.

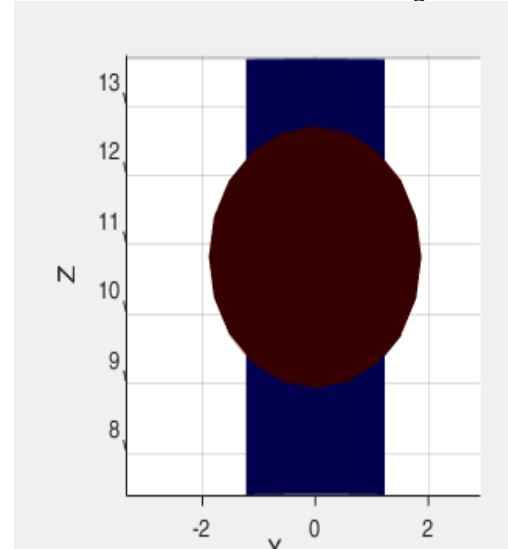


Fig. 4. Descripción de L {1} y L {2}

El eslabón final hacia la muñeca encuentra dividida en el eslabón de pitch de la muñeca L {4} descartado para parametrización con una rotación en α en $\frac{\pi}{2}$ pero es considerado en su simulación gráfica.

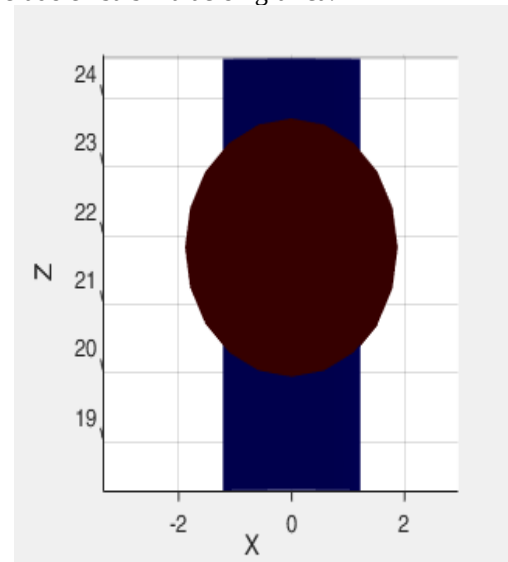


Fig. 5. L {3}

Se considera a continuación para el movimiento de la muñeca el roll L {5} desde el codo hasta el origen del actuador final desplazado en las abscisas respecto al codo en $A=4\text{cm}$ obteniendo el mecanismo con este último eslabón una altura máxima de 33 cm en posición de gripper abierto para tomar objetos y pudiendo alcanzar un tamaño máximo de 39 cm con el gripper cerrado; como se describe en la figura 6.

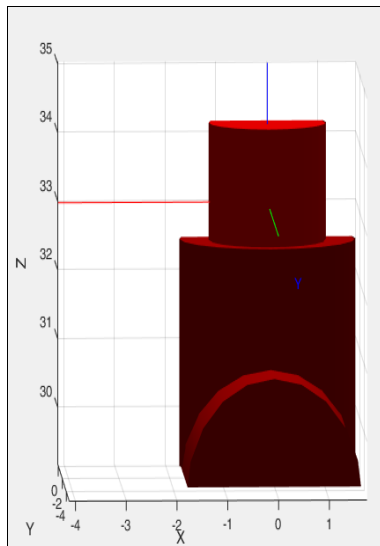


Fig. 6. L {5}

VII. SIMULACIÓN

El diseño CAD y modelado de la cinemática directa del robot MATHBOT fue comprobado mediante una simulación utilizando el lenguaje MATLAB para examinar la eficiencia del modelo matemático descrito en la matriz 0T_5 (33) con los parámetros descritos comparando los resultados respecto a la simulación.

Dado el conjunto de ángulos con entrada para el desarrollo de la cinemática directa 0T_5 (33) y MATLAB los resultados correspondientes al modelado matemático han sido comparados y graficados.

Al ejecutar la simulación se programaron los siguientes resultados de Denavit-Hartenberg (D-H) [21] de acuerdo a (25):

```
Rob = noname: 5 axis, RRRRR, stdDH, slowRNE
+-----+-----+-----+-----+
| j |      theta |      d |      a |
alpha |      offset |
+-----+-----+-----+-----+
| 1 |      q1 | 10.5 |      0 |
1.5708 |      0 |
| 2 |      q2 |      0 | 11.5 |
0 |      0 |
| 3 |      q3 |      0 |      7 |
0 |      0 |
| 4 |      q4 |      0 |      0 |
1.5708 |      0 |
| 5 |      q5 |      4 |      0 |
0 |      0 |
+-----+-----+-----+-----+
```

Los comandos anteriores describen en la columna j que el manipulador tiene 5 grados de libertad; así como sus respectivos parámetros configurados de θ , d, a y α con sus respectivos valores de $\frac{\pi}{2}$ en decimal y las L1 a L5.

Al realizar el producto matricial en la simulación se obtiene con los comandos:

```
PRODUCTOMATRICIAL=R_theta*D_d*D_a*R_alpha
```

Coincidiendo con los valores obtenidos en la matriz (36):

```
0.0000    -0.0000    1.0000    0.0000
1.0000     0.0000   -0.0000    1.0000
0          1.0000    0.0000    1.0000
0          0         0         1.0000
```

De forma similar mediante la transformación Denavit Hartenberg:

```
DENAVITHARTENBERG=[cos(teta)  -
cos(alpha)*sin(teta) sin(alpha)*sin(teta)
a*cos(teta);
sin(teta) cos(alpha)*cos(teta) -
sin(alpha)*cos(teta) a*sin(teta);
0 sin(alpha) cos(alpha) d;
0 0 0 1]
```

Se obtiene el mismo resultado que en (37):

```
0.0000    -0.0000    1.0000    0.0000
1.0000     0.0000   -0.0000    1.0000
0          1.0000    0.0000    1.0000
0          0         0         1.0000
```

Para la simulación de las posiciones la configuración inicial de cadena vertical se programó el ángulo-articulación [01 02 03 04 05] por q1 a q5 de acuerdo a (37):

```
q1=0; q2=pi/2; q3=0; q4=pi/2; q5=0; %Valores
pos1=[q1 ,q2, q3, q4, q5]%MATRIZ
Rob.plot (pos1)%PLOTEO 1
Rob.fkine(pos1) %Generaciyn de MTD
```

Con lo que obtuvo la transformación directa coincidiendo con los valores de (38):

```
pos1=      0      1.5708      0      1.5708      0
ans =
-1         0         0         0
0        -1         0         0
0         0         1        33
0         0         0         1
```

En la figura 7 se describe la simulación de la posición obtenida mediante la MTD (38).

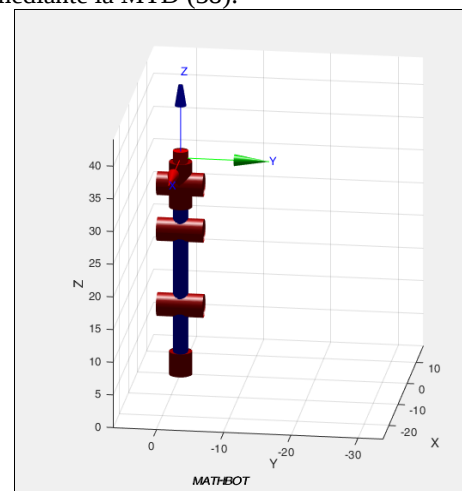


Fig. 7. Posición de inicio con todos los servos energizados de acuerdo a la MTD (14).

Para la programación de la posición desenergizada de los servomotores da configuración [01 02 03 04 05] viene dada por (39) con:

```
q1=0;q2=pi/2;q3=-3*pi/4;q4=pi/4;q5=0; %Valores
pos2=[q1 ,q2, q3, q4, q5]%MATRIZ
Rob.plot (pos2) %PLOTEO
Rob.fkine(pos2) %Generaciyn de MTD
```

Obteniendo su MTD que coincida con (40):

```
pos2 = 0    1.5708    -2.3562    0.7854    0
ans =
    1         0         0         4.95
    0        -1         0         0
    0         0        -1        13.05
    0         0         0         1
```

Su ploteo en modo de “reposo” se describe en la figura 8.

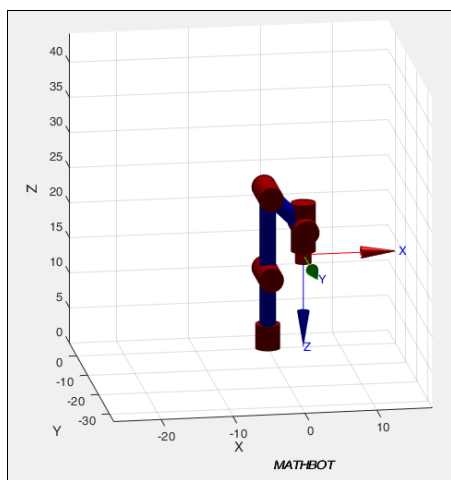


Fig. 8 Simulación de la posición de reposo de acuerdo a la MTD (40).

La posición para tomar un objeto tiene la configuración [01 02 03 04 05] queda dada por (41) con el programa:

```
q1=0;q2=pi/2;q3=-3*pi/4;q4=3*pi/4;q5=0;
%valores
pos3=[q1 ,q2, q3, q4, q5]%MATRIZ
Rob.plot (pos3) %PLOTEO
Rob.fkine(pos3) %Generaciyn de MTD
```

El resultado del efector final (E) coincide con la MTD (42):

```
pos3=0    1.5708    -2.3562    2.3562    0
ans =
    0         0         1         8.95
    0        -1         0         0
    1         0         0        17.05
    0         0         0         1
```

La simulación se describe en la figura 9 en donde se descartan los comandos del actuador final:

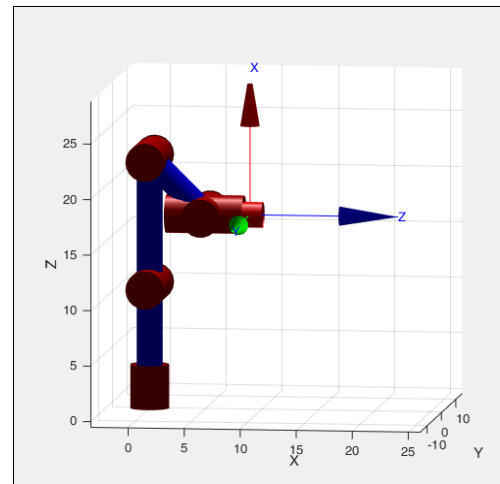


Fig 9. Posición de toma del objeto de acuerdo a la MTD (42).

Para la programación de la posición final para colocar el objeto en su posición final tiene la configuración angular [01 02 03 04 05] descrita en (43):

```
q1=pi;q2=pi/2;q3=-3*pi/4;q4=3*pi/4;q5=0;%valores
pos4=[q1 ,q2, q3, q4, q5]%MATRIZ
Rob.plot (pos4) %PLOTEO
Rob.fkine(pos4) %Generaciyn de MTD
```

Susutituyendo se obtiene el mismo resultado que en (44) por Matlab:

```
pos4=3.1416    1.5708    -2.3562    2.3562    0
ans =
    0         0        -1        -8.95
    0         1         0         0
    1         0         0        17.05
    0         0         0         1
```

El resultado de la simulación de los comandos anteriores se describe en la figura 10.

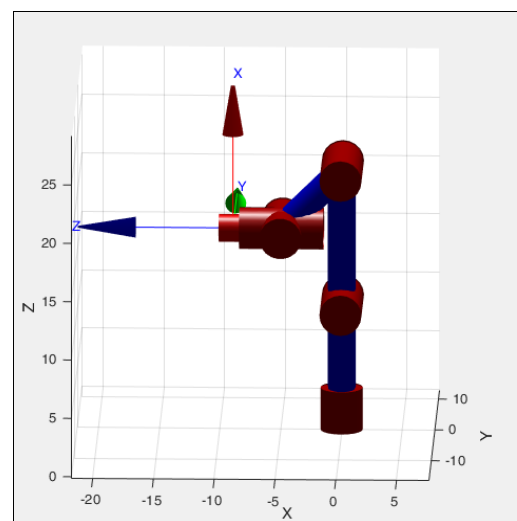


Fig. 10 Simulación de la posición en donde coloca el objeto el manipulador de acuerdo a la MTD (44)

VIII. MANUFACTURA.

Continuando con la metodología anterior y una vez realizado el diseño, modelado matemático y comprobado mediante su simulación en MATLAB como se describió anteriormente, se procedió a realizar un CAM mediante el programa AutoCAD del prototipo de acuerdo a los parámetros diseñados.

9.-Creación de prototipos y pruebas: Para la construir la estructura del prototipo se seleccionó el material SINTRA, debido a que es un PVC no frágil que permite ser manufacturado mediante una cortadora laser mediante un archivo CAD/CAM. La pieza diseñada en el CAD/CAM fueron manufacturadas mediante una cortadora laser y ensambladas con los servomotores como se muestra en la figura 11 y 12.

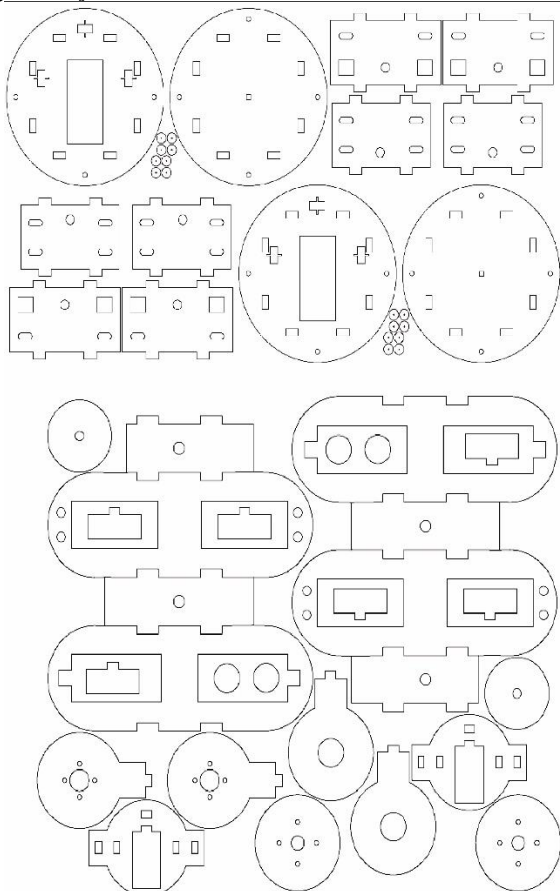


Fig 11. Piezas para manufactura de Cintra mediante corte laser mediante el CAM.

El paso “10.- Producción” fue descartado debido a que el prototipo tiene una función experimental de carácter científico y ha sido registrada; sin embargo, puede ser producida por un tercero solicitando los derechos correspondientes.



Fig 12. MATHBOT manufacturado y ensamblado en Cintra.

IX. PRUEBAS

Para realizar las pruebas se utilizó la tarjeta servocontroladora reprogramable *plug and play* USB-HID (Fajardo y Herrera, 2013) [22]; la cual permite controlar 30 servomotores simultáneamente mediante una GUI que mediante sliders con interpolación de Lagrange para generar el equivalente proporcional del valor del pulso PWM a cada servomotor mediante un sistema neurodifuso que compara y controla la posición actual del motoreductor respecto a la deseada hasta colocarse en ella [23].

Para las pruebas del manipulador se colocaron ejes para ordenadas y abscisas generando un mapa donde el robot fue manipulado mediante la programación de la GUI siguiendo las instrucciones obtenidas a través de las matrices modeladas y simuladas previamente.

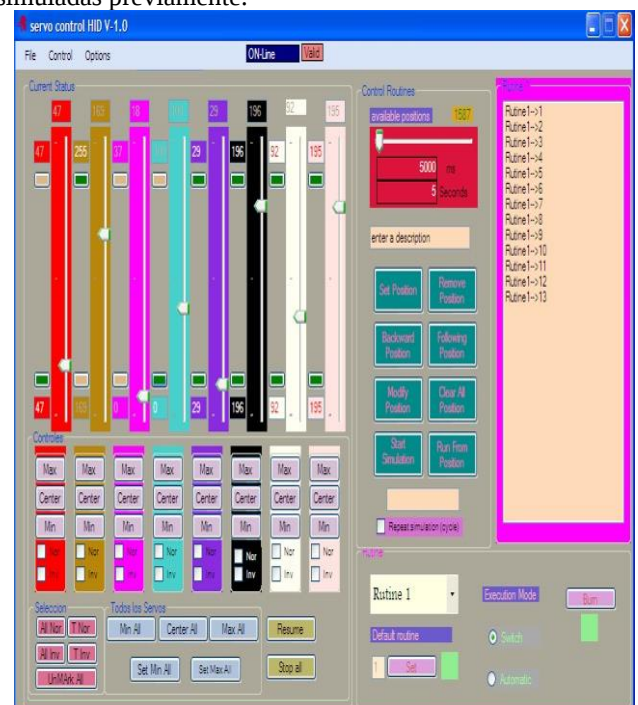


Fig. 13. GUI de la servocontroladora reprogramable USB-HID utilizada en el CIINDET 2013 de la IEEE [22].

Los ángulos de las imágenes fueron medidos y reconocidos por un sistema de reconocimiento de patrones con visión artificial con base a los puntos indicados.

Se calibraron las posiciones máximas y mínimas de los servomotores, así como la posición inicial de los eslabones para que se adecuara con el modelo matemático anteriormente descrito con ayuda del sistema de servocontrol.

Se comparó el resultado de cada uno de los movimientos obtenidos por el robot físico respecto a la simulación y modelado matemático.

Para el primer movimiento de calibración de cadena energizada se obtuvo una posición que coincide con la MTD (38) y la figura 14, en donde se encontró que coinciden las alturas mínimas y corresponde a lo modelado.

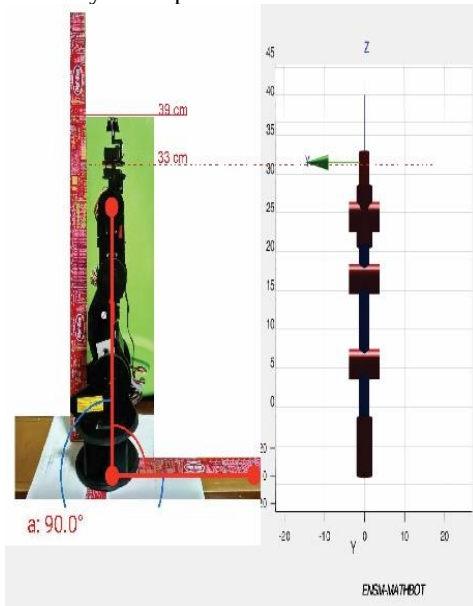


Fig 14. MATHBOT en posición de cadena energizada.

Para el segundo movimiento se obtuvo una posición de reposo de acuerdo a la Fig. 8 y la MTD (40) posicionando las articulaciones en el piso como se describe en la figura 15.

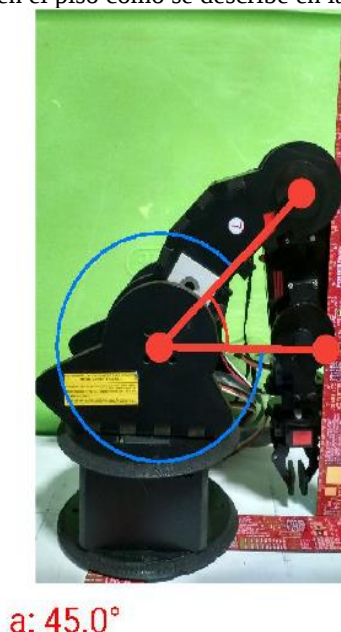


Fig 15. MATHBOT En posición de reposo

Para tomar el objeto se utilizó la MTD (42) coincidiendo con la simulación de la figura 9 y colocando el actuador final (gripper) en modo de apertura para t_0 y en cierre para t_1 , como se describe en la figura 16.



Fig 16. MATHBOT En posición de toma de objeto.

Para colocar en su posición final el objeto se utilizó la MTD (43) coincidiendo con la simulación de la figura 10 y colocando el actuador final (gripper) en modo de cierre para t_0 y en apertura para t_1 para liberar el objeto, como se describe en la figura 17.



Fig 17. MATHBOT En posición de colocado de objeto.

X. CONCLUSIONES

Al haber diseñado de acuerdo a la metodología de Norton [18], se logró la manufactura de un manipulador industrial vertical de 5 GDL de tipo brazo robot modelando 5 eslabones, 6 servomotores y un gripper como actuador final, el modelado matemático de su cinemática directa mediante matrices D-H [21], su simulación en MATLAB, el diseño CAD de sus eslabones y su manufactura CAM en SINTRA mediante corte laser.

La metodología de diseño, modelado, simulación y manufactura permitió la ensamble y construcción de un prototipo de brazo robot con servomotores Hitec controlado a través de una tarjeta USB-HID servocontroladora de secuencias programables con una interfaz gráfica mediante de sliders y valores [22] [23].

El prototipo fue diseñado para cumplir con las dimensiones del modelo matemático y calibrado de acuerdo al espacio cinemático simulado.

Las pruebas de movimiento realizadas con el prototipo de brazo robot coincidieron con las simulaciones en MATLAB y el modelo matemático [14], como se describe en las pruebas de control de las figuras 14 a la 17 con sus respectivos modelos matemáticos y simulaciones en MATLAB.

El modelado matemático de fenómenos físicos y su comprobación mediante simulaciones permite la construcción y control de maquinaria industrial, así como la descripción de fenómenos físicos de manera universal.

Se resalta la importancia y aplicación de la matemática como lenguaje de descripción de la realidad para poder construir modelos matemáticos que permiten dar pie a esquemas, diseños y simulaciones previas a la construcción de maquinaria ahorrando tiempos, movimientos y un gasto innecesario de recursos y materia de manufactura.

Es importante utilizar servomotores digitales que permiten 360 grados de libertad para pruebas específicas [23]; así mismo se puede jugar con diseños estilizados del manipulador en Sintra mientras se mantengan las distancias en un punto de referencia y se calibren los servomotores a las posiciones de arranque como se realizó en el experimento.

El prototipo se puede llevar a un sistema de ensamblaje industrial profesional con materiales metálicos y servomotores de corriente alterna mediante tarjetas controladores con interfaces convertidoras.

REFERENCIAS

- [1] Accreditation Board for Engineering and Technology, Inc (ABET) Definition of Engineering Design. Consultado el 14 de Mayo de 2019. Disponible en: <https://www.abet.org/accreditation/accreditation-criteria/criteria-for-accrediting-engineering-programs-2016-2017/>.
- [2] Hawkins, T. W.: Weierstrass and the theory of matrices: *Archive for History of Exact Sciences* 17 (USA,1977).
- [3] Gerolamo, C. trad. Witmer, T. R.: The Rules of Algebra (Ars Magna). Paperback: Dover Publications (USA,2007).
- [4] Knobloch, E.: Determinants: Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences (USA,1994).
- [5] De Witt's, J.: Elementa Curvarum Linearum Liber Secundus: Edited by Jan Aarts & Edited by Miente Bakker, Edited by Reinie Erne: Springer (UK, 2010).
- [6] Knobloch, Eberhard, Komatsu, Hikosaburo, Liu, Dun (Eds.): Seki, Founder of Modern Mathematics in Japan: Springer (Japan, 2013).
- [7] MacLaurin, C.: Treatise of Algebra Vol I-III Containing. The fundamental rules: J. Nourse, W. Strahan, J. F. and C. Rivingtons, W. Johnston, T. Longman, G. Robinson, and T. Cadell Editors (USA,1749)
- [8] Cramer. G.: Introduction a l'Analyse des Lignes Courbes Algébriques: Freres Cramer & Cl. Philbert (Génova,1750).
- [9] Luigi, P.: Lagrange (1736–1813): a life in mathematics: *Lettera Matematica June 2014, Volume 2, Issue 1–2, pp 3–8*. Pepe, L. Lett Mat Int (USA,2014) 2: 3.
- [10] Gauss, C. F.: Disquisitiones Arithmeticae: Nabu Press (USA, 2014)
- [11] Malykh, A E.: Development of the general theory of determinants up to the beginning of the nineteenth century (Russian): *Mathematical analysis*: (Leningrad, 1990), 88-97.
- [12] Gauss, C. F.: Disquisitiones generales circa superficies curvas: Typis Dieterichianis. Collection (USA,1828).
- [13] Swetz, F. J.: Mathematical Treasure: Cauchy's Mathematical Exercises: Pennsylvania State University (USA,1826).
- [14] Mikhalkin, E. N.: Solution of fifth-degree equations: *Russian Mathematics* 53(6):15-23 (U.R.S.S., 2009) DOI: 10.3103/S1066369X09060036.
- [15] Eigner, M.: An Initial Approach for the Application of Product Assembly Information in the Early Phases of the Product Development Process by Using Methods of Model Based Systems Engineering: *Proceedings of the Nord Design 2014*:724-733 (USA,2014).
- [16] Labarca, Claudio; Culagovski, Rodrigo y Danilo Lagos.: Nuevos territorios: *El modelo digital como laboratorio de formas en la enseñanza de la arquitectura: Ponencias SIGRADI 2005*: Porto Alegre Ed. (Brazil, 2005).
- [17] Bonsiepe, G.: Diseño Industrial, Tecnología y Dependencia: Edicol (Colombia,1978).
- [18] Norton, R.: Diseño de Maquinaria. Mc Graw Hill.Rodríguez, G. (México, 2009).
- [19] Dulces Anahuac: Caramelo Selz Soda. <http://www.dulcesanahuac.com/148/productos/selz-soda/> Consultado el 14 de Mayo de 2019.
- [20] ISO. Standard 8373. <https://www.iso.org/standard/55890.html> Consultado el 14 de Mayo de 2019.
- [21] Hartenberg and J. Denavit: Kinematic Synthesis of Linkages: McGraw-Hill, (USA,1964).
- [22] Fajardo-Rendón, M. y Herrera-Armendia, F.-G.: Servocontrolador Reprogramable para Articulaciones Robóticas USB HID: *Memorias del IEEE X Congreso Internacional Sobre Innovación y Desarrollo Tecnológico: CIINDET IEEE. 2013, Cuernavaca, Morelos, 13-15 de Marzo, 2013*: IEEE international (México, 2013).
- [23] Fajardo-Rendón, M. y Herrera-Armendia, F.-G.: Diseño de un sistema neurodifuso de conversión PWM a motoreductor CD: Modelado y aplicación: *Memorias del 1er Congreso Nacional de Matemáticas, su enseñanza y aprendizaje 2016*: Marcos Fajardo Rendón y Francisco Guillermo Herrera Armendia Editores (México,2016).

Una visión de la currícula en Matemáticas

Isaac Villavicencio Gómez

Escuela Normal Superior de México, Manuel Salazar 201 Colonia Ex-hacienda del Rosario, Azcapotzalco,
02420 CDMX, México.
isaacvillavicenciogomez@gmail.com

Resumen- La nueva visión de la currícula en matemáticas es la integración de mejoras a los planes y programas de estudio en un futuro próximo, para de integrar acorde a los cambios sociales, elementos de la matemática con base en elementos de estudio y avances conocidos. La finalidad, es que el docente y alumno aprendan que hay cambios en la matemática y que es relevante prepararse desde la educación básica al nivel superior, para que un alumno lleve bases de conocimiento matemático en que comprenden la relevancia de los temas de clase. Mediante la clasificación de temas se da una aproximación inicial mediante el se propone una visión de la currícula renovada que incida en que se apliquen cambios acordes al contexto social y debidamente fundamentados. La parte actitudinal es sustantiva que se impregne en las clases de los docentes de educación básica a un modo conceptual o reflexivo en la educación media superior y a un tono mayor en lo conceptual y aplicativo según corresponda el tema.

Palabras Clave- currículum, planeación, programas de estudio, escuelas normales.

Abstract- The new vision of the curriculum in mathematics is the integration of improvements to the plans and programs of study in the near future to integrate according to social changes, elements of mathematics based on known elements of study and progress. The aim is that teachers and students learn that there are changes in mathematics and is relevant prepared from basic education to higher level, for a student to take mathematical knowledge bases they understand the importance of class issues. Through four classifications of subjects an overview by which it is generated a vision of the renewed curriculum that affects chord changes apply to social and duly substantiated given context. The Attitudinal substantive part is that pervade in classes of teachers of basic education to a conceptual or reflective mode in upper secondary education and a major key in the conceptual and applicative as appropriate theme.

Key Words- curriculum, planning, study programs, normales schools.

Mathematical Subject Classification: 97B50.

I. INTRODUCCIÓN

El currículum hoy en día muestra la trayectoria que una persona ha tenido en el tramo educativo como en el laboral, tenemos en boga el modelo educativo por competencias profesionales, la cual hoy articula conocimientos globales, conocimientos profesionales y experiencias laborales, como el identificar la experiencia, entonces lo anterior combina elementos que permite identificar las necesidades hacia las cuales se orientará la formación profesional.

El currículum es un elemento de mucho valor donde se plasma la enseñanza, cuándo enseñar, cómo enseñar, cuándo y cómo evaluar. Integro la siguiente frase como contexto. - *“...la evaluación se orienta a derivar aprendizajes del desarrollo del currículum, sirviendo para mejorar el curso, para decidir qué materiales de instrucción y qué métodos son satisfactorios y cuándo es necesario cambiar.”* [1]

La visión de la currícula en matemáticas es comprender la importancia de revisar y mejorar los planes y programas de estudio actuales de educación, con los nuevos temas a integrar, entonces se presentan 4 clasificaciones que explican cambios de impacto que se observan en los temas de matemáticas. Se integra además aspectos importantes que se deben mantener presentes al elaborar una currícula, ya que la evaluación en lo interno y externo es vital dentro de la propuesta a realizar, así como alinear de forma fundamentada el contenido a los aspectos de psicopedagogía, política y economía, sociología y epistemología.

II. DESARROLLO

El currículum son el conjunto de criterios, planes de estudio, programas, metodologías, y procesos que contribuyen a la formación integral y a la construcción de la identidad cultural nacional, regional y local, incluyendo también los recursos humanos, académicos y físicos para poner en práctica las políticas y llevar a cabo un proyecto educativo institucional. [2]

El currículum incluye los recursos humanos, académicos y físicos, para poner en práctica las políticas y llevar a cabo un proyecto educativo institucional. Los alcances son la formación integral y a la construcción de la identidad cultural nacional, regional y local. Y se utiliza en la escuela que pertenece a una región.

En las escuelas se tiene una cultura, la cual va formando el currículum del alumno, que va a transmitir de múltiples formas; lo cual es un hecho sustantivo a la Escuela. Los contenidos y culturas son parte de una estricta condición lógica en la enseñanza y el currículum es la estructuración de esa cultura bajo claves psicopedagógicas.

El currículum viene a ser una pasarela entre la cultura y la sociedad, digamos del exterior de la escuela con la escuela, en la cultura de las personas con la sociedad, ante el posible conocer.

Si el contenido cultural es la condición lógica de la enseñanza, se va a dirigir a condiciones reales de la enseñanza. Visto desde la trascendencia por su potencia cognitiva y su complejidad inevitable, implica en cierta forma algunos enfoques y tratamientos muy diversos y ser un terreno conflictivo y polémico, pero se requiere la sensibilidad y conocimiento psicopedagógico para superar las barreras a presentarse. [3]

Por lo tanto por la parte psicopedagógica y hoy concretamente en la mayoría de las escuelas mediante las competencias, ya que si pasamos a las competencias laborales allí se aprende pero bajo el mismo enfoque de competencias como primera instancia.

El currículum representa de manera explícita e implícita se conjugan una serie de concepciones ideológicas,

socioantropológicas, epistemológicas, pedagógicas y psicológicas, y que tiene una orientación pedagógica, considera desde la fundamentación a la operación para ponerlo en práctica, y basada en la estructura académica, administrativa, legal y económica, lo cual lo lleva a una formalización y oficialización. Las partes que ayudan a la formación del currículo es el Plan de estudios dicho por Casarini.- *“El plan de estudios y los programas son documentos guías que prescriben las finalidades, contenidos y acciones que son necesarios para llevar a cabo por parte del maestro y sus alumnos para desarrollar un currículum”* [4]

Los planes de estudio pueden estar organizados por asignaturas, áreas de conocimiento o módulos, se tiene la relación con el alumno y el conocimiento, y vinculación a la sociedad, enseñanza aprendizaje y práctica profesional. Por otra parte los Programas de estudio. - organizan y planifican la conformación de estudio de una materia o asignatura, área o módulo; de tal que es la herramienta fundamental de trabajo de los profesores.

Con base en lo manejado por Frida Díaz Barriga, aporta lo siguiente. - *“Johnson considera que el currículo es algo más que el conjunto de las experiencias de aprendizaje, se refiere al aprendizaje terminal del alumno como resultado de la enseñanza. Para esta autora, el currículo especifica los resultados que se desean obtener del aprendizaje, los cuales deben estar estructurados previamente; de esa manera hace referencia a los fines como resultado del aprendizaje y sostiene que el currículo no establece los medios –es decir, las actividades y los materiales- sino los fines.”* [5] Y se agrega que el currículo se compone de cuatro elementos: objetivos curriculares, plan de estudios, cartas descriptivas, y sistema de evaluación.

Mediante un conjunto de puntos clasificados se coloca en contexto la necesidad de un conocimiento matemático que se utiliza en diferentes ramas de la ciencia. Se revisa para comprender la importancia e impacto de renovar las matemáticas ante el cambio social, en los casos de resolver problemáticas, como de la formación de los alumnos para que logren las competencias que la sociedad actual demanda.

Fomentar mediante la presente propuesta una visión renovada para integrar mejoras en el currículo de la matemática, es un punto de apoyo para que exista innovación, desarrollo y crecimiento social de los docentes y discentes.

Es prioritario enseñar a un alumno una matemática de forma significativa, concreta y puntual para resolver problemas actuales, y ante todo mantener en la pasarela los casos de investigación que ayuden al desarrollo de la ciencia y resolución de asuntos matemáticos.

Todos en lo general brindamos aportes importantes que colocan una dificultad, o dan solución a un problema. El alumno debe ante todo contar con capacidades, logradas, que motiven y fundamenten, la atención que tenemos a los procesos de interés. Iniciemos la revisión de la clasificación de temas.

1.- Tema de álgebra y geometría

Existen hoy métodos algebraicos un poco avanzados como es el álgebra de Kolyvagin-Flach y la teoría de Iwasawa, que es parte primordial de la resolución de la ecuación de más de dos grados que planteó Fermat como irresoluble.

Existe además el tema de los fractales que explica comportamiento en imágenes que obedecen a patrones. Y en

su entorno hay diversas teorías que dan soluciones a problemas matemáticos.

Existen un conjunto de figuras en las cuales se hacen aproximaciones de espacios. Y es donde la geometría no encuentra cómo brindar una solución pertinente. El manejo de figuras geométricas que no tiene una forma ordenada y congruente en su estructura vuelve un tanto complicado establecer su manejo. Y existen hoy diversidad de figuras diversas por lo que para su análisis se requiere del uso y aplicaciones de diversas técnicas matemáticas que permitan tener un resultado aproximado al esperado.

2.- Tema de enfoque de sistemas para el análisis de problemas irresolubles.

Las ciencias como la física hoy en día están proponiendo opciones de soluciones mediante un enfoque de sistemas, en que hay subsistemas y así otros subsistemas. Esto deriva de la complejidad por ejemplo:

Un enfoque de sistemas implica que los subsistemas se caracterizan por un padre e hijo, y guardan ciertas características particulares.

Dentro de otras ramas de las ciencias, como la educación, también un enfoque de sistemas está permeando la educación del futuro, en que se rompa la forma actual de educar, y se integren formas basadas en el enfoque de sistemas, que faciliten al alumno un aprendizaje.

Se muestra en contexto a la física cuántica, que mediante otro enfoque, pretende y da solución a procesos más avanzados de análisis.

Manejo de anillos o grupos importantes de elementos nos lleva a un álgebra superior abstracta, ya que reclasificamos y aplicamos patrones de la matemática pero ya con temas un tanto de corte abstracto. Esto implica reconocer el enfoque de sistemas y agrupaciones de elementos u objetos, para facilitar análisis grupal.

3.- Tema de solución a problemas con tendencias a soluciones no lineales y cálculos exhaustivos mediante otros métodos.

Hoy existen procesos que no mantienen un comportamiento o patrón principal, e incluso puede ser un proceso de n variables e interacciones, para conocer un resultado que marque pauta hacia escenarios futuros de acción.

El enfoque de los sistemas, y la investigación de operaciones, aportan elementos de apoyo para solucionar problemas particulares, en el caso de la Investigación de Operaciones es por medio de temas de tipo no lineal.

Si se optimiza al maximizar o minimizar, entonces la investigación de operaciones con los métodos simplex y derivados otorga un apoyo importante. En el caso de ecuaciones de más dimensiones se vuelve complejo el entendimiento y en cierta manera la aplicación al mundo real, lo cual complica el entendimiento o bien la solución a un problema. Sin embargo con el avance en la resolución de ecuaciones como lo es el Teorema de Fermat, se vislumbra que ahora no basta un conocimiento sustantivo que traemos, ya que debe ser integral y focalizado para dar una visión de que diversos elementos coadyuvaban en la solución de un tema matemático.

La mecánica cuántica contiene dentro de sí un conjunto de valores de corte matemático, y que hoy dentro del medio de la computación hace necesario el entendimiento del tema como un punto a futuro para el uso de las computadoras a una

velocidad mayor a la que hasta el momento se conoce. Por lo tanto el sentido lógico y la resolución a modelos matemáticos son necesarios para los futuros profesionistas al tema de las tecnologías de la información y la comunicación.

4.- Los Sistemas Complejos

Los sistemas complejos [6] se refieren a diversas interacciones entre componentes físico o bien lógico, los cuales tienen comportamientos o funcionalidades, que suelen ser necesarios que sean explicados o relacionados a proceso de frontera entre ciencias y disciplinas.

Generalmente la complejidad implica conocer a nivel micro, macro o por interacciones. Dentro del cual es importante saber el medio en el que están para conocer qué factores afectan los procesos o comportamientos.

Los sistemas complejos tienen injerencia en la computación, la física, la biología, economía y sociología.

Cuando hay comportamientos particulares pueden apegarse a modelos matemáticos y técnicas de tipo de grafos, redes, control, simulaciones, minería de datos por mencionar algunos casos conocidos. Lo relevante en muchos casos es un modelo matemático y su comportamiento en el ambiente de interés, representarlo por formas matemáticas nos permite comunicarnos y medir lo que se realiza.

En el caso del cómputo es necesario saber que vienen cambios en la rapidez de respuesta al manejar la información ante el modelo de la teoría cuántica. Muchas formas de avance se dan con un enfoque diferente de atender un conjunto de peticiones y concurrencias. Entonces enseñar a pensar de forma lógica y con modelos matemáticos en las diferentes áreas de apoyo que forma la matemática.

5.-Relación de la clasificación al proceso de enseñanza aprendizaje.

El primer paso es que el docente cuente con la visión e importancia de mejorar la forma y temas de enseñar a un alumno, entonces implica materiales que ante el cierre de la clase otorguen la actitud de la nueva visión curricular de un tema a trabajar.

El profesor desplegará diversas formas de integrar materiales como técnicas de desarrollo que den un aprendizaje al alumno, posteriormente el alumno recibirá la estrategia planeada, y así es como lograremos el proceso de cambio. El alumno deberá tener la visión, y un dominio de los temas sustantivos a su nivel educativo.

Los académicos que desarrollen e integren mejoras en el currículo, deberán fundamentar la relación en alguna de las cuatro clasificaciones expresadas que de forma inicial plantemos. Sobre todo alinear la formación de la currícula a los puntos en que se basa todo currículo en la parte psicopedagogía, política y económica, sociológica, y la evaluación. Además debemos justificar en la currícula matemática el apoyo en las Tecnologías de la información y comunicación, y alineado a los temas de las diferentes ramas matemáticas, justificando a cada rubro como base y fundamento el sostén de la propuesta curricular.

6.-Psicopedagogía

Utilizar tendencias del tipo estructuralista y de competencias. En las cuales se tiene la posibilidad de utilizar el aprendizaje significativo, el modelo de aprendizaje basado en resolución de problemas, de zonas de desarrollo próximo, o bien otros aspectos esperados relacionados que faciliten el entender de la matemática.

7.-Epistemológica

La epistemología como parte de la filosofía que estudia los principios, fundamentos, extensión y métodos del conocimiento humano, incluye en la matemática un conjunto de elementos actuales en las metodologías de desarrollo de sistemas, rumbo a la certificación de los medios utilizados, o cual garantiza calidad, estándares y medidas cuantificables que otorgan credibilidad, seguridad, control y seguimiento de las prácticas instauradas.

8.-Política y económica

Dentro de la parte política, acorde al modelo que un gobierno establece, se requiere de medidas que logren que los medios tecnológicos no sean una dificultad que complique la instauración del modelo deseado, a la par mantener si es el caso la posibilidad de libertad de expresión y alcance de los medios tecnológicos, de forma regulada sin minar intereses de la sociedad ni de la clase política.

En la parte económica, es necesario que se logren mayores ganancias de las organizaciones ante los bienes o servicios que se otorguen a la sociedad, ya que la tecnología pone en la pasarela social a sus empresas e instituciones públicas y privadas, de tal forma que al realizarlo con mejores prácticas, control seguimiento, manteniendo eficiencia y eficacia, es como se logra organizaciones con ventajas competitivas que favorecen una sociedad madura, y con formas pertinentes que favorezcan la economía, incluso como área generar medios de regulación.

9.-Sociológica

La finalidad de la educación es mantener un orden de interacción social de las personas. De tal manera que los avances tecnológicos están acercando comunidades internacionales, y personas con intereses iguales, así como colocar mediante la sociedad del conocimiento más información al alcance de la sociedad que logre que las personas hagan uso de la matemática, en un sentido autorregulado, y que mediante las medidas que realizará un profesionista dedicado a la matemática, ayude a que esa interacción con personas y medios tecnológicos sea pertinente y acorde a formas esperadas en que no se dañe en ningún sentido, una convivencia o manejo de los medios.

Se considera que la matemática facilita y mejora la vida en las sociedades, pero ahora será superada porque el especialista de la matemática otorgaría mayor confianza en los recursos desplegados en las organizaciones.

10.-Evaluación

Es la forma en que se verificará el aprendizaje esperado del alumno. En primera instancia se plantea el manejo de competencias dentro de las matemáticas, se visualiza en una universidad pública o privada.

También es manejable en un modelo de universidad técnica o bien autónoma. Se considera en un sentido a escuela universitaria privada por lo tanto sería un modelo educativo basado en competencias, que es la tendencia actual en la educación en la nación y a nivel global.

Por lo tanto la evaluación toma en consideración las prácticas de evaluación acordes a competencias mediante el uso de rúbricas, listas de cotejo, andamios y otros mecanismo relacionados.

11.-En el mediano plazo en la educación básica.

Dentro de la parte política y económica integro los actuales cambios que se consideró en educación básica y que

no se pueden dejar de lado ya que es necesario entender el impacto

Actualmente puede consultarse en el portal de gob.mx, en la Secretaría de Educación Pública un cambio a la educación en el programa de estudios, se realiza la propuesta para la consulta de acciones de mejora, para que se instaure el modelo en los próximos años, como se muestra en la figura 1.

El modelo educativo se basa en la escuela al centro, el planteamiento curricular con humanismo y valores, considera a la sociedad del conocimiento, y las oportunidades de las ciencias de educación, contenidos educativos y ambientes de aprendizaje.

Además toma en consideración a la formación y desarrollo profesional docente tal es con la Reforma del servicio profesional docente.

El modelo considera la inclusión y equidad, y la gobernanza del sistema educativo mediante el conjunto de instituciones y leyes que lo sustentan. [7]

En el currículum de educación básica se consideraron en lo general rasgos que son

1. Se comunica con confianza y eficiencia.
2. Desarrolla el pensamiento crítico y resuelve problemas con creatividad.
3. Tiene iniciativa y favorece la colaboración.
4. Muestra responsabilidad por su cuerpo y por el ambiente.
5. Posee autoconocimiento y regula sus emociones.
6. Sabe acerca de los fenómenos del mundo natural y social.
7. Aprecia la belleza, el arte y la cultura.
8. Cultiva su formación ética y respeta la legalidad.
9. Emplea habilidades digitales de manera pertinente.

Existen 14 principios pedagógicos, y se toma en cuenta la evaluación como parte de la planeación, pues ambas son dos caras de la misma moneda. El ambiente de aprendizaje es un conjunto de factores que favorecen o dificultan la interacción social en un espacio físico o virtual determinado.

Los contenidos se basan en cuatro consignas que se distinguen al estilo de la siguiente frase, “*Esta selección tiene en cuenta las propuestas derivadas de la investigación educativa más pertinente, actualizada y basada en el conocimiento de la escuela, en los estudios acerca de cómo aprenden los niños y los adolescentes y sobre los materiales que resultan útiles para estudiar.*” [8]

También consideran que el ejercicio para balancear la cantidad de temas que es posible cubrir adecuadamente en el tiempo lectivo es una tarea crítica del desarrollo curricular. Los aprendizajes que se logran de forma significativa permiten movilizar prácticas hacia nuevas tareas y contextos.

Y los 3 componentes curriculares, con base en las ideas desarrolladas en los apartados anteriores, la Propuesta curricular plantea la organización de los contenidos programáticos en tres componentes:

1) Aprendizajes clave, 2) Desarrollo personal y social, 3) Autonomía curricular. Y existen 3 componentes claves, en que versa el nuevo currículum que se analiza, aprendizajes clave, desarrollo personal y social y autonomía curricular.

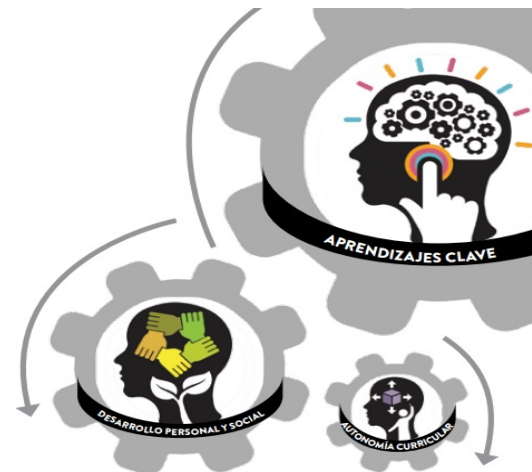


Fig. 1. Aprendizajes clave. Fuente: www.gob.mx/sep

Lo anterior expresado es un puente pertinente al cual se alinean las formas de educación de la matemática, sin embargo es necesario revisar la propuesta concreta del currículum para adaptar la estrategia que mantenga el aporte comentado de una matemática renovada.

Sí en el caso de la educación básica se mantiene el cambio propuesto por la SEP, resta aplicar con las mejores formas la enseñanza de los temas, pero ahora con una visión de inicio rumbo a un cambio a cada nivel educativo.

III. CONCLUSIONES

El currículum contiene: las competencias básicas, conocimientos, habilidades y aptitudes, que se logran mediante la implementación del plan y programa de estudios basados en de objetivos, contenidos, criterios metodológicos y de evaluación que los estudiantes deben alcanzar en un determinado nivel educativo, mediante formas epistemológicas, psicológicas, pedagógicas y sociológicas.

Cuando somos hacedores de los planes y programas que guían y evalúan a los alumnos es vital que lo que se enseñe y el currículum como tal responda a preguntas tales como. - ¿qué enseñar?, ¿cómo enseñar?, ¿cuándo enseñar? y ¿qué, ¿cómo y cuándo evaluar?

Toda curricula debe contener a una cultura maker colabora con el equilibrio entre economía, desarrollo social y conservación del ambiente al revalorar la producción y el consumo local. David Cuartielles [9] lo explica:

“Para mí, la cultura maker es poder crear, no necesariamente máquinas, sino procesos y herramientas a nivel de fabricación personal para hacer trabajos a escala local; es el proceso de aprendizaje de hacer algo y compartirlo con otra gente”.

El fin es lograr un conocimiento que genere ejercicios más relevantes de democratización tecnológica, de herramientas y formas de creación. Y que nos lleve a una nueva ecología del aprendizaje [9], en que se respondan los parámetros en la escolarización universal y la acción educativa distribuida e interconectada, en que se dé importancia a las trayectorias personales de aprendizaje como acceso al conocimiento de la sociedad de la información.

Algo que debemos considerar en el currículum es la toma de conciencia de las limitaciones de la educación escolar para evitar que las desigualdades económicas se transformen en

desigualdades educativas, repudio al sistema educativo de no preparar al alumno para su inserción en el mundo laboral, las acusaciones de ineficacia y de baja calidad.

Hoy ante la representación de 4 casos es que logramos clarificar una visión de otorgar una enseñanza matemática a los alumnos con bases firmes, que facilite posteriores temas de corte matemático para que el profesionista resuelva problemáticas sustantivas.

Es necesario dar la visión a los docentes para que comprendan el alcance de la matemática básica, con el fin de que el alumno cuente con la actitud, visión, conocimiento y habilidad matemática, ya que, al enfrentar escenarios de tipo medio superior, superior y de investigación, mantenga un pensar que coadyuve en su desarrollo, y por consiguiente el de la sociedad.

Si el alumno se motiva a que la base educativa de la matemática en los primeros años de estudio otorga en primera instancia elementos de valor que fomenten el aprendizaje del alumno. Es necesario reforzar la formación del alumno e integrar cambios a la currícula matemática, para preparar a los futuros profesionistas y que así resuelvan situaciones futuras en los niveles educativos de educación media superior y superior. Los puntos de apoyo para forjar la visión se han comentado y viene a ser un primer análisis para trabajar en los cambios que permitan contar con la currícula pertinente en materia de matemáticas.

Las reformas educativas en México son dinámicas en los últimos 15 años, de tal forma que han tocado a la educación básica, bachillerato, en este caso es fundamental que la estrategia de enseñanza aprendizaje mejore por parte del docente y se prepare para comprender la relevancia de una visión matemática actual que considera los cambios en la currícula.

Los especialistas en materia de currícula, tiene un trabajo importante a considerar e insertar elementos de valor que consideren en la matemática puntos de apoyo hoy planteados con la difusión de la visión para concretizarlo al currículo interno y externo.

Un asunto pendiente es la educación superior, pero se trabaja en la instauración de reformas y nuevas políticas al respecto. Y otro aspecto que no denota las reformas de manera más concreta, directa y pública es la evaluación curricular en la parte externa y un punto de oportunidad es que se transparente más el trabajo de evaluación externa, para comprender y reconocer la importancia de un hecho como tal.

Finalmente es necesario distinguir que la visión de la currícula en matemáticas debe tenerse presente para mejorar el trabajo realizado, es imperativo, ya que un factor en contra es el tiempo, de no integrarlo se afecta a las generaciones de profesionistas y no se cumple en parte los fines que persigue la formación matemática. Es un momento pertinente para establecer mejoras y dar más elementos y capacidades a los alumnos en la sociedad actual.

REFERENCIAS

- [1] Ríos C., P. (2008). Evaluación en tiempos de cambio. Universidad Pedagógica Experimental Libertador; Instituto Pedagógico de Caracas, Venezuela.
- [2] Gimeno S, J. ¿Qué significa el currículum?
- [3] Ministerio de Educación nacional. (2016) Diccionario educativo. República de Colombia.
- [4] Casarini R., M. (2016) Teoría y diseño curricular. La evaluación y el currículo.
- [5] Díaz Barriga, F.; Lule, M.; Pacheco, D., Saad, E., Rojas, S. Metodología de diseño curricular para educación superior. Trillas, México, 2005, pp. 17-20
- [6] Sánchez A. (n.d.) Sistemas Complejos y Aplicaciones. Universidad Carlos III, Universidad de Zaragoza e Instituto Madrileño de Estudios Avanzados IMDEA Matemáticas.
- [7] SEP (2016) El modelo educativo 2016. Recuperado el 22/08/2016 de:
- [8] SEP (2016) Propuesta curricular para la educación obligatoria 2016. Pág. 53
- [9] Coll, C. (2013) El currículo escolar en el marco de la nueva ecología del aprendizaje.

Journal de *Objetos y* *Objetivos* *Matemáticos*